Корни многочленов.

М$27\frac{1}{2}\diamond$1. Разложите x^8+128 в произведение вещественных квадратных трёхчленов.

М$27\frac{1}{2}\diamond$2. Пусть $z = x+iy \in \mathbb{C}$ является корнем $f \in \mathbb{R}[x]$. Будет ли $\overline{z} = x - iy$ корнем f ?

М$27\frac{1}{2}\diamond$3. Верно ли, что у любого кубического многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$ есть либо три вещественных (возможно, кратных) корня, либо ровно один вещественный и два невещественных комплексно сопряжённых корня. Как различить эти случаи глядя на D_f ?

М$27\frac{1}{2}\diamond4^{\circ}$. Пусть $\mathbb{F}$ — любое поле, $x^2-d \in \mathbb{F}[x]$ неприводим над $\mathbb{F}$, и $\mathbb{F}(d) = \{\alpha+\beta\sqrt{d} \mid \alpha,\beta \in \mathbb{F}\}$ — *квадратичное расширение* поля $\mathbb{F}$, как в листке $17\frac{2}{3}$. Будет ли $\mathbb{F}(d)$ полем?

М$27\frac{1}{2}\diamond$5. Пусть в зад. М$27\frac{1}{2}\diamond$4 некий кубический $f \in \mathbb{F}[x]$ имеет в $\mathbb{F}(d)$ корень $a+b\sqrt{d}$. Верно ли, что: **а)** $a-b\sqrt{d}$ тоже корень f ; **б)** f приводим над $\mathbb{F}$; **в)** у f есть корень в $\mathbb{F}$?

М$27\frac{1}{2}\diamond$6. Докажите, что кубический многочлен с целыми коэффициентами, который имеет корень, выражающийся через 1 конечным числом сложений, умножений, вычитаний, делений и извлечений квадратных корней, имеет и рациональный корень.

М$27\frac{1}{2}\diamond7^{*}$. Есть ли угол, не разбивающийся циркулем и линейкой на три равных части?

М$27\frac{1}{2}\diamond8^{*}$. Можно ли циркулем и линейкой построить правильный семиугольник?

М$27\frac{1}{2}\diamond$9 (решение кубического уравнения в тригонометрических функциях). Пользуясь формулой для косинуса тройного угла, выразите корни многочлена $4x^3-3x-a$ с $a \in \mathbb{R}$ и $|a| \leqslant 1$ через тригонометрические функции. При каких условиях на дискриминант и коэффициенты многочлен x^3+px+q можно подходящей заменой $x \mapsto \alpha x$ сделать пропорциональным многочлену $4x^3-3x-a$ с $a \in \mathbb{R}$ и $|a| \leqslant 1$?

М$27\frac{1}{2}\diamond$10. Решите уравнения: **а)** $x^3-3x+1=0$, **б*)** $x^3+x^2-2x-1=0$.

М$27\frac{1}{2}\diamond$11 (решение кубического уравнения методом Кардано). Придумайте квадратное уравнение, корни z_1, z_2 которого таковы, что $\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}$ является корнем кубического трёхчлена $f(x) = x^3+px+q$. Какой знак должен быть у D_f, чтобы числа z_1, z_2 оказались:
а) вещественны и различны? **б)** комплексно сопряжены?

М$27\frac{1}{2}\diamond$12. Найдите вещественные корни многочленов: **а)** x^3-x+1 ; **б*)** x^3+2x^2+x+1 .

М$27\frac{1}{2}\diamond$13. Вычислите в радикалах: **а)** $\cos(\pi/9)$, **б)** $\cos(\pi/12)$, **в*)** $\cos(\pi/7)$.

Топология поля $\mathbb{C}$. Под ε-окрестностью числа $z_0 \in \mathbb{C}$ мы понимаем $D_e(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < \varepsilon\}$, т. е. открытый круг радиуса ε с центром в z_0. Пределы комплексных последовательностей и функций, непрерывность функций $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, предельные и изолированные точки комплексных множеств, открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{C}$ и т. п. определяются дословно так же, как в $\mathbb{R}$.

М$27\frac{1}{2}\diamond14^{\circ}$. Сформулируйте и докажите теоремы о пределе суммы и произведения двух сходящихся комплексных последовательностей. Верно ли, что $z_n = x_n+iy_n \to z_0 = x_0+iy_0$ в $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда $x_n \to x_0$ и $y_n \to y_0$ в $\mathbb{R}$?

М$27\frac{1}{2}\diamond$15. Пусть $f \in \mathbb{C}[x]$ — произвольный многочлен, отличный от константы. Верно ли, что:
а) $\forall$ замкнутого круга $D \subset \mathbb{C}$ $\exists\, z_1,z_2 \in D$: $|f(z_1)| = \inf_D |f(z)|$ и $|f(z_2)| = \sup_D |f(z)|$;
б) $|f(z)| \to \infty$ при $z \to \infty$; **в)** $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$: $|f(z_0)| = \inf_{\mathbb{C}} |f(z)|$?

М$27\frac{1}{2}\diamond$16 (лемма Даламбера). Для любого $f \in \mathbb{C}[x]$, такого что $f(z_0) \neq 0$, найдите вблизи z_0 точку z, где $|f(z)| < |f(z_0)|$ (подсказка: запишите $f(x)$ по возрастанию степеней $(x-z_0)$ как $f(x) = f(z_0)+a_m(x-z_0)^m+a_{m+1}(x-z_0)^{m+1}+\cdots$, где m — младшая из степеней с $a_m \neq 0$, возьмите $\vartheta \in \mathbb{C}$ так, чтобы $a_m\vartheta^m = -f(z_0)$, и ищите z в виде $z_0+t\,\vartheta$ с $t \in \mathbb{R}$).

М$27\frac{1}{2}\diamond17^{*}$ (алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{C}$). Докажите, что любой многочлен степени n из $\mathbb{C}[x]$ имеет (с учётом кратностей) ровно n комплексных корней.

М$27\frac{1}{2}\diamond$18. Опишите все неприводимые многочлены в $\mathbb{C}[x]$ и в $\mathbb{R}[x]$.