Комплексные числа

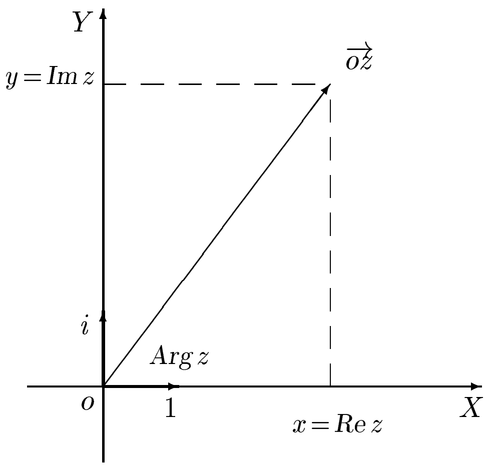

Рис. 26.1. Комплексное число.

Комплексное число — это точка z на плоскости $\mathbb{C}$ с фиксированной системой прямоугольных координат XoY, единичные базисные векторы которой обозначаются $\{\overrightarrow{1}, \overrightarrow{i}\}$ (см. рис. 26.1). С каждым $z\in\mathbb{C}$ свяжем пару координат (x, y) и радиус-вектор $\overrightarrow{oz} = x\cdot\overrightarrow{1} + y\cdot\overrightarrow{i}$, что обычно записывают просто как $z = x + iy$. Действительные числа $Re\,z \overset{\text{def}}{=} x$, $Im\,z \overset{\text{def}}{=} y$ и $|z| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x^2+y^2}$ называются *вещественной частью*, *мнимой частью* и *модулем* комплексного числа z. Многозначный ориентированный угол[1] луча oz с осью oX называется *аргументом* z и обозначается $Arg\,z$. Комплексные числа можно *складывать* и *перемножать*. По определению, при сложении комплексных чисел их радиус-векторы складываюся (по правилу параллелограмма), а при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются (так что умножение на фиксированное комплексное число $a : \mathbb{C} \xrightarrow{z\mapsto az} \mathbb{C}$ есть *поворотная гомотетия* на угол $\mathrm{Arg}(a)$ с центром o и коэффициентом $|a|$).

М26◇1°. Найдите[2] **а)** i^2; **б)** i^3; **в)** $1/i - 1$; **г)** $(1+i)^5/(1-i)^3$; **д)** $\left(\sqrt{3}+i/1-i\right)^{30}$; **е)** $\left(i-\sqrt{3}/i-1\right)^{90}$; **ж)** все z с $z^4 = -1$; **з)** все z с $z^3 = -i$.

М26◇2° (сопряжение). $\overline{z} \overset{\text{def}}{=} x - iy$ называется *сопряжённым* к $z = x - iy$; проверьте, что сопряжение перестановочно со сложением и умножением и выразите $1/z$ через $\overline{z}$ и $|z|$.

М26◇3°. Проверьте, что комплексные числа составляют *поле*[3], в которое поле $\mathbb{R}$ с сохранением операций вкладывается в качестве числовой прямой (oX). Вычислите действительную и мнимую части чисел $1/z$, $z + w$ и zw, если $z = x_1 + iy_1$, $w = x_2 + iy_2$.

М26◇4. Найдите: **а°)** $(5+i)(7-6i)/(3+i)$; **б)** $(1+it)/(1-it)$ с $t\in\mathbb{R}$.

М26◇5°. Решите ур-я: **а)** $z^2 + (2i-7)z + (13-i) = 0$ **б)** $(z+i)^3 + (z-i)^3 = 0$ **в)** $\overline{z} = z^3$

М26◇6°. Пусть $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $w = \cos\beta + i\sin\beta$. Вычислите геометрически и путём раскрытия скобок действительную и мнимую части чисел **а)** zw **б)** z^2 **в)** z^3 **г)** z^4 и получите отсюда тригонометрические формулы «сложения аргуметов» и «кратных углов».

М26◇7. Решите в $\mathbb{C}$ уравнение $z^5 = 1$ и вычислите $\cos\left(2\pi/5\right)$ и $\sin\left(2\pi/5\right)$ в радикалах.

М26◇8. Куда отображения **а)** $z \longmapsto z^2$ **б)** $z \longmapsto 1/z$ переводят декартову и полярную координатную сетки, окружность $|z+i| = 1$ и кошечку с рис. 17.2?

М26◇9. Вычислите суммы: **а)** $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$ и $1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$
б) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$ **в)** $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots$ **г)** $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots$
д) $2\sin x + 3\sin 2x + \cdots + n\sin(n-1)x$ и $1 + 2\cos x + 3\cos 2x + \cdots + n\cos(n-1)x$
е) $1 + 2\zeta + 3\zeta^2 + \cdots + n\zeta^{n-1}$, где $\zeta = \cos\left(2\pi/n\right) + i\sin\left(2\pi/n\right)$

М26◇10. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ вычислите сумму и произведение s-тых степеней всех комплексных корней уравнения $z^n = 1$ при $s = 1, 2, 3 \ldots$.

---

[1] напомним(см. **Лст. № 24**), что с точностью до любого целого числа оборотов он равен ориентированной длине дуги, которую надо пройти по единичной окружности от луча $[oX)$ до луча $[oz)$, т. е. $Arg\,z = \{\varphi + 2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}$, где φ — это радианная мера ориентированного угла $\widehat{xoz}$, а k — любое целое число

[2] в этом листке «найдите z»означает «нарисуйте и вычислите $Re\,z$, $Im\,z$, $|z|$ и $Arg\,z$»

[3] т. е. что сложение и умножение подчиняются переместительному, сочетательному и распределительному законам, а уравнения $a + z = b$ и $cz = d$ при любых заданных a, b, d и $c \neq 0$ единственным образом разрешимы относительно z