Тригонометрия.

Тригонометрические функции. Пусть число $t\in\mathbb{R}$ переходит при универсальном накрытии $\mathbb{R} \twoheadrightarrow S^1$ в точку с координатами (x,y) на единичной окружности. Эти координаты обозначаются через $\cos t \overset{\text{def}}{=} x$ и $\sin t \overset{\text{def}}{=} y$ и называются *косинусом* и *синусом* числа $t\in\mathbb{R}$. Эти две функции, а также $\operatorname{tg} t \overset{\text{def}}{=} \sin t/\cos t$, $\operatorname{ctg} t \overset{\text{def}}{=} \cos t/\sin t$, $\sec t \overset{\text{def}}{=} 1/\cos t$ и $\operatorname{cosec} t \overset{\text{def}}{=} 1/\sin t$ обычно называт *тригонометрическими* функциями действительного числа t. Прямо из определений вытекают *основные тригонометрические тождества*: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, $\operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t - 1$, $\operatorname{ctg}^2 t = \operatorname{cosec}^2 t - 1$.

М25◇1°. Найдите области определения и постройте графики всех тригонометрических функций, исследуйте их на периодичность и чётность.

М25◇2° (формулы приведения). Представьте в виде тригонометрической функции от аргумента t синус, косинус и тангенс от **а)** $-t$; **б)** $(\pm t \pm \pi)$; **в)** $(\pm t \pm \frac{\pi}{2})$.

М25◇3. Положительны или отрицательны числа $\sin(-10)$ и $\cos(100)$?

М25◇4. Найдите все $\vartheta\in\mathbb{R}$, для которых: **а)** $\cos\vartheta = 0$; **б)** $\sin\vartheta = -1$; **в)** $\sin\vartheta > \sqrt{2}/2$; **г)** $\sin\vartheta \leqslant 1/2$; **д)** $-\sqrt{3}/2 \leqslant \cos\vartheta < 1/2$; **е)** $|\operatorname{tg}\vartheta| < 1$; **ж)** $\sin\vartheta < \cos\vartheta$; **з)** $\operatorname{tg}\vartheta \geqslant \operatorname{ctg}\vartheta$.

М25◇5. При каком c прямая $ax+by=c$ касается единичной окружности? Найдите максимальное и минимальное значения функции $a\cos t + b\sin t$ с заданными $a,b\in\mathbb{R}$.

М25◇6. Всегда ли $|\sin\vartheta + \cos\vartheta| \leqslant \sqrt{2}$? При каких ϑ выполнено равенство?

Обратные тригонометрические функции: число $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$ называется *арксинусом* (соотв. *арктангенсом*) числа x, если $\sin\vartheta = x$ (соотв. $\operatorname{tg}\vartheta = x$); число $\vartheta\in[0,\pi]$, такое что $\cos\vartheta = x$, называется *арккосинусом* числа x. Обозначения: $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\arccos x$.

М25◇7°. Для каждой из трёх обратных тригонометрических функций запомните множество значений, укажите область определения и постройте график. Найдите $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x$.

М25◇8°. Найдите: **а)** $\arcsin\cos 2000$; **б)** $\cos\operatorname{arctg} 2000$; **в)** $\cos\arcsin x$.

М25◇9 (сдвиг по фазе). Всякая ли линейная комбинация $a\cos t + b\sin t$ с фиксированными $a,b\in\mathbb{R}$ представляется в виде $\alpha\cos(t+\varphi)$ с подходящими *амплитудой* α и *фазой* φ?

М25◇10 (рациональная параметризация окружности). Пусть проекция единичной окружности из точки $(-1,0)$ на прямую $x=1$ переводит точку (x,y) в точку $(1,2t)$. Выразите x и y в виде рациональных функций от t и найдите пределы этих функций при $t\to\pm\infty$. Верно ли, что эти функции задают взаимно однозначное отображение между рациональными точками прямой $x=1$ и отличными от $(-1,0)$ точками единичной окружности, обе координаты которых рациональны?

М25◇11. Пользуясь зад. М25◇10, выразите $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$ через $\operatorname{tg}(x/2)$.

М25◇12 (пифагоровы тройки). Пользуясь зад. М25◇10, напишите функции $a(p,q)$, $b(p,q)$ и $c(p,q)$ при подстановке в которые произвольных целых чисел p,q будут получаться все возможные целые решения уравнения Пифагора $a^2+b^2=c^2$ и только они.

М25◇13. Какими неравенствами связаны x, $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ при $0<x<\pi/2$?

М25◇14. Докажите, что все **а)** тригонометрические **б)** обратные тригонометрические функции[1] непрерывны всюду на своей области определения.

М25◇15. Вычислите: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$, **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$, **е)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 5x}$, **ж)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\operatorname{arctg} x}{1-\cos x}$, **з)** $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos x}{x\sin(2x)}$.

[1] совет: начните с синуса