Длина окружности и площадь круга

(в этом листке запрещено использование тригонометрии)

M24◇1. У какого из выпуклых многоугольников $M_1 \subset M_2$ меньше площадь и периметр?

Терминология и обозначения. Разбиение p данной дуги AB на данной окружности с центром O — это набор точек $p = \{P_0, P_1, \dots, P_n\} \subset AB$, расположенных на дуге так, что $P_0 = A$, $P_n = B$, и при всех $i = 1, 2, \dots, (n-1)$ точка P_i лежит строго между P_{i-1} и P_{i+1}. Ломаная $P_0P_1P_2\dots P_n$ называется *вписанной ломаной* разбиения p, её длина обозначается через $\ell(p)$, а длина самой длиной её стороны — через $\lambda(p)$Аналогично, многоугольник $OP_0P_1P_2\dots P_n$ называется *вписанным многоугольником* разбиения p, а его площадь обозначается $S(p)$.

M24◇2. $\forall$ разбиений p_1, p_2 постройте разбиение p, содержащее как p_1, так и p_2, и докажите, что множества значений $\ell(p)$ и $S(p)$ при всевозможных p ограничены сверху.

Определения. $\ell(AB) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_p \ell(p)$ называется *линой дуги*, а $S(AOB) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_p S(p)$ — *площадью сектора*.

M24◇3°. Пусть $AC = AB \cup BC$, и $AB \cap BC = B$. Выразите $\ell(AC)$ и $S(AOC)$ через $\ell(AB)$, $\ell(BC)$, $S(AOB)$ и $S(BOC)$.

M24◇4°. Докажите, что отношение $\ell(AB)$ к радиусу и к длине полуокружности, а также отношение $S(AOB)$ к квадрату радиуса, зависят только от величины угла AOB, но не от радиуса окружности и положения дуги на ней.

M24◇5*. Покажите, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, такое что для всякого разбиения p с $\lambda(p) < \delta$ обе погрешности $|\ell(AB) - \ell(p)|$ и $|S(AOB) - S(p)|$ не превышают ε.

M24◇6. Выразите площадь сектора через длину дуги и радиус.

Радианная мера угла показывает, какую часть составляет этот угол от развёрнутого угла π. Точнее, длина полуокружности единичного радиуса обозначается через π, и если отношение длины дуги AB к длине полуокружности того же радиуса равно ϑ, то говорят, что дуга AB (и центральный угол AOB) составляют $\vartheta\pi$ радиан. Подчеркнём, что $\vartheta\pi \in \mathbb{R}$.

M24◇7 (архимедово вычисление числа π). Пусть p_n — это разбиение полуокружности радиуса 1 на 2^n равных дуг, и $\lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(p_n)$, $\ell_n \stackrel{\text{def}}{=} \ell(p_n)$, $S_n \stackrel{\text{def}}{=} S(p_n)$. Выразите λ_n, ℓ_n и S_n через λ_{n-1} и представьте λ_n как $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2}}}}}$ (сколько тут радикалов?). Используя только четыре арифметических действия и извлечение квадратных корней[1], вычислите число π с точностью до 2-го знака после запятой.

Универсальное накрытие единичной окружности числовою прямою. Сопоставим каждому числу $t \in \mathbb{R}$ точку на единичной окружности $S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, получающуюся откладыванием от точки $(1, 0)$ дуги длины $|t|$ по ЧС, если $t < 0$, и против ЧС, если $t > 0$. Иначе говоря, числовая прямая $\mathbb{R}^1$, ориентированная также, как ось OY, приставляется своим нулём $0 \in \mathbb{R}^1$ к точке $(1, 0) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$ и затем наматывается на S^1, как нерастяжимая нитка на катушку. При этом числа $t \in \mathbb{R}$, отличающиеся на целое число оборотов (т. е. на целые кратные 2π), переходят в одну и ту же точку окружности. Набор чисел $t \in \mathbb{R}$, переходящих в данную точку $P \in S^1$, называется *аргументом* точки P (или *многозначным ориентированным углом* луча OP с осью OX); обозначение: $Arg(P)$.

M24◇8. В какой четверти лежат точки с аргументами $57\pi/4$ и 2000 ?

M24◇9. Напишите формулу, описывающую все $t \in \mathbb{R}$, переходящие при универсальном накрытии в точки $(x, y) \in S^1$, у которых **а)** $x = 1/2$; **б)** $y = -1$; **в)** $x = -\sqrt{2}/2$; **г)** $y = 1/\sqrt{3}$; **д)** $y < 0$ и $x > 0$; **е)** $y \in \left[-1/2, \sqrt{2}/2\right]$; **ж)** $x \in \left[-\sqrt{3}/2, 1/2\right]$; **з)** $x \in \left[-\sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2\right]$ и $y \in \left[-1/2, 1/2\right]$.

[1] можете, по немощи своей, использовать тут машинку, которой, однако, у Архимеда не было