Повторение: топология числовой прямой

М21◇1. Имеется последовательность отрезков, каждый из которых содержится в предыдущем, и длина отрезков стремится к нулю. Докажите, что пересечение всех этих отрезков непусто и состоит из одной точки.

М21◇2. Докажите, что в любое покрытие отрезка интервалами содержит конечное подпокрытие.

М21◇3. Докажите, что любая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

М21◇4. Докажите, что две последовательности вещественных чисел (a_n) и (b_n) тогда и только тогда сходятся к общему конечному пределу, когда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N} : \forall\, k, m > n\ |a_k - b_m| < \varepsilon$.

Открытые и замкнутые множества. Для любого вещественного $\varepsilon > 0$ интервал

$$D_\varepsilon(p) \stackrel{\text{def}}{=} (p-\varepsilon, p+\varepsilon) = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, |x-p| < \varepsilon \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, p-\varepsilon < x < p+\varepsilon \,\}$$

называется ε-окрестностью точки $p \in \mathbb{R}$. Точка $a \in M$ называется *изолированной* точкой множества $M \subset \mathbb{R}$, если у неё есть ε-окрестность, не содержащая никаких других точек M кроме a. Множество называется *дискретным*, если все его точки — изолированные. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *внутренней* точкой множества $M \subset \mathbb{R}$, если у неё есть ε-окрестность, целиком содержащаяся в M. Множество называется *открытым*, если все его точки — внутренние. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если *любая* её ε-окрестность содержит какую-нибудь точку $x \in M$, отличную от a. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки (в частности, если их у него вообще нет). Пустое множество, по определению, считается и открытым, и замкнутым. Непустые ограниченные замкнутые множества называются *компактами*.

М21◇5. Можно ли представить отрезок в виде объединения двух его собственных[1]
а) открытых **б)** замкнутых подмножеств?

М21◇6. Докажите, что множество $Z \subset \mathbb{R}$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R} \setminus Z = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \notin Z \,\}$ открыто. Перечислите все одновременно открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{R}$.

М21◇7. Докажите, что произвольное открытое множество на прямой представляет собой объединение не более, чем счетного, набора попарно непересекающихся интервалов (a_i, b_i), где $a_i < b_i \quad a_i \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R},\ \ b_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

М21◇8. Докажите, что объединение двух замкнутых множеств и пересечение любого набора замкнутых множеств являются замкнутыми множествами. Сформулируйте и докажите соответствующие факты об открытых множествах.

М21◇9. Существует ли множество, множество всех предельных которого есть:
а) $\varnothing$; **б)** одна точка; **в)** две точки; **г)** $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$; **д)** $\{1/k \mid k \in \mathbb{N}\}$?

М21◇10. Может ли бесконечное ограниченное множество не иметь предельных точек?

М21◇11. Существуют ли на прямой бесконечные дискретные компакты?

М21◇12. Какие из перечисленных далее свойств непустого подмножества $Z \subset \mathbb{R}$ эквивалентны друг другу: **а)** Z компакт **б)** Z ограничено и замкнуто
в) любое покрытие Z открытыми множествами содержит конечное подпокрытие
г) любая последовательность элементов Z содержит подпоследовательность, которая имеет предел, принадлежащий Z.

[1] $S \subset M$ называется *собственным* подмножеством, если $S \neq \varnothing$ и $S \neq M$