Пределы последовательностей

М20◇1 (теоремы Больцано - Вейерштрасса). Любая ли ограниченная последовательность:
а) имеет предельную точку? **б)** содержит подпоследовательность, имеющую предел?
в) если монотонно неубывает (или монотонно невозрастает), то имеет предел?

М20◇2. Пусть (a_n) и (b_n) имеют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$. Докажите, что
а) $a_n \pm b_n$, **б)** $a_n \cdot b_n$, **в)** $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$, а если $\beta \neq 0$, то и **г)** $1/b_n$, **д)** a_n/b_n тоже сходятся, и выразите их пределы через α и β.

М20◇3. Вычислите пределы (при $n\to\infty$) или докажите расходимость последовательностей:
а) $(3n^3-5n+7)/(5n^3+7n^2-11)$; **б)** $\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-5n}$; **в)** $\sqrt{n^2+2n^3}-\sqrt{2n^2+n^3}$;
г) $\sqrt[n]{n!}$; **д*)** $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$; **е*)** $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ радикалов}}$; **ж*)** $(1-1/n)^n$; **з*)** $(1+3/n)^n$.

М20◇4. Будем называть *перемешиванием* последовательности $\mathbb{N}\xrightarrow{a}\mathbb{R}$ её композицию с произвольным взаимно однозначным отображением $\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$. Влияет ли перемешивание на сходимость/расходимость и значение предела (в том числе, когда $a_n\to\pm\infty,\infty$)?

М20◇5 (критерий Коши). Последовательность a_n называется *последовательностью Коши*, если $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,N\in\mathbb{N} : |a_{n_1}-a_{n_2}|<\varepsilon\;\forall\,n_1,n_2>N$. Докажите, что последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши.

М20◇6*. Две последовательности Коши (a_n) и (b_n) называются *эквивалентными*, если любое перемешивание последовательности a_1, b_1, a_2, b_2, … тоже является последовательностью Коши. Назовём действительным числом Коши класс эквивалентных рациональных последовательностей Коши. Определите сумму и произведение действительных чисел Коши и докажите, что множество действительных чисел Коши изоморфно (с сохранением операций) множеству действительных чисел, определённых через БДД или дедекиндовы сечения (см. зад. М14◇9).

Абсолютная и условная сходимость рядов. Ряд $\sum\limits_{i\geqslant 1} a_i$ произвольных чисел $a_i\in\mathbb{R}$ называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм $s_n = a_1+\cdots+a_n$ имеет конечный предел (он называется *суммой ряда*). Сходящийся ряд называется *абсолютно сходящимся*, если его ряд абсолютных величин $\sum\limits_{i\geqslant 1}|a_i|$ тоже сходится; в противном случае ряд называют *условно сходящимся*.

М20◇7. Убедитесь, что для ряда неотрицательных чисел новое определение сходимости, данное в этом листке, согласуется с определением из позапрошлого листка.

М20◇8. Чему равен $\lim\limits_{i\to\infty} a_i$, если ряд $\sum\limits_{i\geqslant 0} a_i$ сходится?

М20◇9. Сходится ли ряд $1-1/2+1/3-1/4+\cdots$ **а)** абсолютно? **б)** условно?

М20◇10 (критерий Коши). Докажите, что ряд $\sum\limits_{i\geqslant 1} a_i$ сходится тогда и только тогда, когда
$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,N\in\mathbb{N} : |a_{n_1}+a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2}|<\varepsilon$ для всех номеров $n_2>n_1>N$.

М20◇11*. Докажите, что при помощи подходящего перемешивания слагаемых условно сходящегося ряда его сумму можно сделать равной любому наперёд заданному числу, а также сделать ряд расходящимся.

М20◇12. Можно ли перемешать слагаемые ряда $1-1+1-1+\cdots$ так, чтоб он стал сходиться?

М20◇13*. Изменяется ли сумма абсолютно сходящегося ряда при перемешивании слагаемых?