Квадратичные иррациональности

M$20\frac{2}{3}\diamond$1. Пусть иррациональное $\alpha\in\mathbb{R}$ является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами. Проверьте, что все остатки r_n канонического разложения α в цепную дробь также являются корнями квадратных уравнений с целыми коэффициентами. Верно ли, что:

а) у всех этих уравнений один и тот же дискриминант?

б) множество коэффициентов этих уравнений ограничено?

M$20\frac{2}{3}\diamond$2 (теорема Лагранжа). Докажите, что вещественное число тогда и только тогда является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, когда его каноническое представление цепной дробью периодично.

Диофантовы приближения. Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$ — произвольное число. Рациональное число p/q ($p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$) называется *наилучшим приближением* к α, если для любого другого рационального числа $m/n\neq p/q$ ($m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$) со знаменателем $m\leqslant q$ имеет место строгое неравенство $|\alpha n-m|>|\alpha q-p|$.

M$20\frac{2}{3}\diamond$3°. Докажите, что любое иррациональное $\alpha\in\mathbb{R}$ обладает наилучшими приближениями со сколь угодно большим знаменателем, а также что все наилучшие приближения несократимы и исчерпываются подходящими дробями канонического разложения α в цепную дробь.

M$20\frac{2}{3}\diamond$4°. Докажите, что для любого иррационального числа α существует бесконечно много несократимых дробей x/y с $x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству $\left|\alpha-x/y\right|<1/y^2$.

M$20\frac{2}{3}\diamond$5. Нарисуйте кривые $x^2-y^2=1$ и $x^2-3y^2=1$. Есть ли на них целые точки кроме $(\pm1,0)$, и если да, то конечно ли множество таких точек?

M$20\frac{2}{3}\diamond$6. Для любого ли натурального d, не делящегося на квадраты, можно подобрать $m\in\mathbb{N}$ так, чтобы **а)** неравенство $x^2-dy^2\leqslant m$ **б)** уравнение $x^2-dy^2=m$ имело бесконечно много целых решений (x,y) с $x,y\neq0$?

Квадратичные расширения, норма и сопряжение. Пусть $d\in\mathbb{N}$ не делится на квадраты; положим $\mathbb{Q}(\sqrt{d})\overset{\text{def}}{=}\{\,x+y\sqrt{d}\mid x,y,\in\mathbb{Q}\}$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]\overset{\text{def}}{=}\{\,p+q\sqrt{d}\mid p,q,\in\mathbb{Z}\}$. Отображение $\mathbb{Q}(\sqrt{d})\xrightarrow{\alpha\mapsto\overline{\alpha}}\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, переводящее $\alpha=x+y\sqrt{d}$ в $\overline{\alpha}=x-y\sqrt{d}$ называется *сопряжением*, а отображение $\mathbb{Q}(\sqrt{d})\xrightarrow{N}\mathbb{Q}$, переводящее α в $N(\alpha)\overset{\text{def}}{=}\alpha\overline{\alpha}=x^2-dy^2$ называется *нормой*.

M$20\frac{2}{3}\diamond$7°. Проверьте, что $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ замкнуты относительно сложения, вычитания и умножения. Для $\alpha\in\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ выразите α^{-1} через $\overline{\alpha}$ и $N(\alpha)$. Верно ли, что:

а) $\overline{\alpha_1\pm\alpha_2}=\overline{\alpha_1}\pm\overline{\alpha_2}$? **б)** $\overline{\alpha_1\cdot\alpha_2}=\overline{\alpha_1}\cdot\overline{\alpha_2}$? **в)** $N(\overline{\alpha})=N(\alpha)$? **г)** $N(\alpha_1\alpha_2)=N(\alpha_1)N(\alpha_2)$?

д) $\vartheta\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ тогда и только тогда обратим в $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, когда $N(\vartheta)=\pm1$?

е) множество всех элементов $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ с нормой 1 замкнуто относительно умножения?

M$20\frac{2}{3}\diamond$8* (уравнение Пелля). Пусть целое $d\geqslant2$ не делится на квадраты; *уравнение Пелля*: $x^2-dy^2=1$ описывает все числа из $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ с нормой 1; у него, разумеется, есть 2 тривиальных решения $(\pm1,0)$, и вместе с каждым решением (x,y) решениями будут и все $(\pm x,\pm y)$. Решение (x_0,y_0) с *натуральными* x_0, y_0 называется *фундаментальным*, если вещественное число $x_0+y_0\sqrt{d}$ минимально среди всех чисел $x+y\sqrt{d}$ с нормой 1 и $x,y\in\mathbb{N}$. Докажите, что:

а) фундаментальное решение (x_0,y_0) существует и единственно;

б) x_0/y_0 есть подходящая дробь канонического разложения $\sqrt{d}$ в цепную дробь;

в) все $x+y\sqrt{d}$ с нормой 1 и $x,y\in\mathbb{N}$ исчерпываются числами $\left(x_0+y_0\sqrt{d}\right)^n$ с $n\in\mathbb{N}$.

M$20\frac{2}{3}\diamond$9. Найдите фундаментальные решения и опишите все целые решения уравнений[1]:

а) $x^2-5y^2=1$; **б)** $x^2-19y^2=1$; **в)** $x^2-43y^2=1$; **г)** $x^2-57y^2=1$.

[1] если Вы любите программирование, то можете написать программы для отыскания фундаментальных решений уравнения Пелля и разложения в цепные дроби чисел вида $x+y\sqrt{d}$ с $x,y,d\in\mathbb{Z}$