Получение оценок

Матанализ есть искусство получения точных результатов посредством приближённых оценок.
(из профессорско - преподавательского фолькльора)

M18◇1 (неравенство Бернулли). Верно ли, что $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\,\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и произвольного действительного $\alpha > -1$?

M18◇2. Укажите какое-нибудь[1] $m \in \mathbb{N}$, чтобы при всех целых $n \geqslant m$ выполнялась оценка:

а) $1000 \cdot 2^n < n!$; **б)** $100 \cdot n^2 < 2^n$; **в)** $10 \cdot n^3 < 2^n$; **г)** $n^{10} < 2^n$; **д)** $(1+10^{-4})^n > 10^6$; **е)** $(1-10^{-4})^n < 10^{-6}$; **ж)** $1/(k+1) + 1/(k+2) + \cdots + 1/(k+n) > 1/2$.

Оценки функций. Функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, заданная на некотором множестве X, называется *ограниченной сверху* (соотв. *ограниченной снизу* и просто *ограниченной*) на X, если таковым является множество её значений $f(X) \subset \mathbb{R}$. Иначе говоря, f ограничена сверху, если $\exists\, c \in \mathbb{R} : f(x) < c \;\; \forall x \in X$; f ограничена снизу, если $\exists\, c \in \mathbb{R} : f(x) > c \;\; \forall x \in X$; f ограничена, если $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} : c_1 < f(x) < c_2 \;\; \forall x \in X$.

M18◇3. Исследуйте каждую из функций: $x^3 - 10\,x$, $\dfrac{x^3 - x + 1}{x^4 + 1}$, $\dfrac{x^4 - x + 1}{x^4 + 1}$, $\dfrac{x^5 - x + 1}{x^4 + 1}$ на ограниченность **а)** на отрезке $[-100, 100]$; **б)** на всей прямой.

M18◇4. Какие из перечисленных ниже функций ограничены на своей области определения и с какой стороны: **а)** $\sqrt{x^2+1} - x$; **б)** $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$; **в)** $\dfrac{5\,x}{\sqrt{2\,x+1} - \sqrt{2\,x-1}}$; **г)** $\dfrac{3 + 2\,x}{3\,x - 2}$.

M18◇5. Ограничены ли сверху последовательности: **а)** $a_n = C_n^{100} / n^{100}$? **б)** $b_n = \left(1 + 1/n\right)^n$?

Оценки рядов. Бесконечные суммы типа $\sum\limits_{\nu \geqslant 1} a_\nu = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ называются *рядами*. Конечная сумма первых m членов такого ряда $s_m = \sum\limits_{\nu=1}^{m} a_\nu = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ называется его *частичной суммой*. Ряд *неотрицательных* действительных чисел называется *сходящимся*, если множество значений его частичных сумм ограничено сверху; твг этого множества называется *суммой* ряда. Если частичные суммы не ограничены, то говорят, что ряд *расходится*.

M18◇6. Докажите, что сумма положительной убывающей бесконечной геометрической прогрессии сходится и выразите её (если Вы до сих пор этого не сделали) через первое слагаемое и знаменатель.

M18◇7. Верно ли, что любая ε-окрестность любого числа содержит бесконечно много рациональных чисел? Можно ли покрыть все рациональные числа системой интервалов, суммарная длина которых меньше любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$?

M18◇8 (число e). Докажите, что число $e \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k \geqslant 0} 1/k! = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + \cdots$

а) существует; **б)** удовлетворяет неравенствам $2,7 < e < 2,8$; **в*)** иррационально.

M18◇9 (гармонический ряд). Сходится ли ряд: $\sum\limits_{k \geqslant 1} 1/k = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots$?

M18◇10. Сходиться ли ряд, составленный из квадратов членов гармонического ряда?

M18◇11 (задача о стирке). Имеется 10 *кг* грязного белья и 10 *кг* чистой воды. При погружении любой части белья в любое количество воды грязь распределяется в их общей массе равномерно. Можно ли уменьшить количество грязи в белье более чем в **а)** 3 **б*)** 2000 раз?

M18◇12*. Из гармонического ряда выкинули все слагаемые, в десятичной записи которых участвует цифра 9. Докажите, что сумма оставшихся слагаемых не превышает 100.

[1] подчеркнём, что «какое-нибудь» вовсе не означает «как можно меньшее»