Окрестности и покрытия

M15◇1 (лемма о вложенных отрезках). Имеется последовательность отрезков, каждый из которых содержится в предыдущем. Может ли пересечение всех этих отрезков быть пустым?

M15◇2. Изменится ли ответ, если отрезки заменить интервалами?

M15◇3. Группа естествоиспытателей в течении 6 часов наблюдала за (неравномерно) ползущей улиткой так, что она всё это время была под присмотром. Каждый наблюдатель следил за улиткой ровно 1 час без перерывов и зафиксировал, что она проползла за этот час ровно 1 метр. Могла ли улитка за время всего эксперимента проползти **а)** 5 *м* ? **б)** 10 *м* ? **в)** 12 *м* ?

M15◇4 (лемма о конечном покрытии). Докажите, что в любом покрытии отрезка интервалами найдётся конечный набор интервалов, покрывающий весь отрезок.

M15◇5. Из любого ли покрытия отрезка интервалами можно удалить часть так, чтобы оставшиеся интервалы тоже составляли покрытие, но каждую точку накрывало бы не более двух из них?

M15◇6. Изменится ли что-нибудь в предыдущих двух задачах, если отрезок заменить интервалом?

M15◇7. Всегда ли из покрытия отрезка **а)** конечным **б)** любым множеством содержащихся внутри него отрезков можно выкинуть часть отрезков так, чтобы оставшиеся по-прежнему покрывали исходный отрезок и их суммарная длина не превышала бы его удвоенной длины?

Внутренние точки и открытые множества. Для любого положительного числа ε будем называть ε-окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ интервал

$$D_\varepsilon(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, |x-x_0| < \varepsilon \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon \,\}$$

длины 2ε с центром в x_0. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *внутренней точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если у неё есть ε-окрестность, целиком содержащаяся в M. Множество называется *открытым*, если все его точки — внутренние. Иначе говоря, $U \subset \mathbb{R}$ открыто, если $\forall\, u \in U \;\; \exists\, \varepsilon > 0 : D_\varepsilon(u) \subset U$ (величина ε может зависеть от точки u). Пустое множество тоже, по определению, считается открытым.

M15◇8°. Убедитесь, что промежутки $(-\infty, a)$, $(a, -\infty)$ и (a, b) открыты. Можно ли разбить интервал в объединение двух непересекающихся открытых множеств?

M15◇9. Докажите, что объединение любого набора открытых множеств открыто.

M15◇10. Докажите, что пересечение конечного набора открытых множеств открыто. Так ли это для пересечений бесконечных наборов?

M15◇11. Докажите, что всякое открытое множество на прямой представляет собой объединение конечного или счётного набора попарно непересекающихся интервалов, в числе которых допускаются и неограниченные интервалы типа $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ и $(-\infty, +\infty)$.

Изолированные точки и дискретные множества. Точка $a \in M \subset \mathbb{R}$ называется *изолированной точкой* множества M, если некоторая её ε-окрестность не содержит никаких других точек из M. Множество, все точки которого изолированы, называется *дискретным*.

M15◇12. Может ли бесконечное дискретное множество быть:
а) ограниченным? **б)** несчётным?