# Предельные точки множеств

**Предельные точки.** Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если *любая* её $\varepsilon$-окрестность $D_\varepsilon(x_0)$ содержит какую-нибудь точку $x \in M$, отличную от $x_0$.

**M$15\frac{1}{2}\diamond$1.** Постройте бесконечное множество $M \subset \mathbb{R}$, множество предельных точек которого: **а)** пусто; **б)** состоит из одной точки; **в)** состоит из двух точек; **г)** совпадает с $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

**M$15\frac{1}{2}\diamond$2.** Может ли множество предельных точек быть множеством всех чисел вида $1/k$ с $k \in \mathbb{N}$?

**M$15\frac{1}{2}\diamond$3.** Может ли бесконечное ограниченное множество не иметь предельных точек?

**Замкнутые множества.** Множество $Z \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки (в частности, если их у него вообще нет). Непустые ограниченные замкнутые множества называются *компактами*.

**M$15\frac{1}{2}\diamond$4°.** Докажите, что отрезок и прямая — замкнуты, а интервал и открытый луч — нет. Бывают ли дискретные незамкнутые множества?

**M$15\frac{1}{2}\diamond$5°.** Бывают ли бесконечные дискретные компакты?

**M$15\frac{1}{2}\diamond$6°.** Разбивается ли отрезок в объединение двух непересекающихся непустых замкнутых множеств? Перечислите все одновременно открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{R}$.

**M$15\frac{1}{2}\diamond$7.** Докажите, что множество $Z \subset \mathbb{R}$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R} \setminus Z = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \notin Z \,\}$ открыто.

**M$15\frac{1}{2}\diamond$8.** Докажите, что пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

**M$15\frac{1}{2}\diamond$9.** Докажите, что объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто. Так ли это для бесконечных наборов?

**M$15\frac{1}{2}\diamond$10 (лемма о вложенных компактах).** Докажите, что любая последовательность вложенных компактов $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$ имеет непустое пересечение: $\bigcap K_\nu \neq \varnothing$.

**M$15\frac{1}{2}\diamond$11* (лемма о конечном покрытии).** Докажите, что $K \subset \mathbb{R}$ компакт тогда и только тогда, когда любое его покрытие интервалами содержит конечное подпокрытие.

**Канторово множество.** Определим по индукции последовательность компактов $K_\nu \subset [0,1]$ следующим образом. Каждый $K_\nu$ является объединением $2^\nu$ отрезков: $K_{\nu+1}$ получается из $K_\nu$ выкидыванием открытой (т. е. без концевых точек) средней трети из каждого отрезка, входящего в $K_\nu$, а $K_0 = [0,1]$. Пересечение $\mathfrak{K} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\limits_\nu K_\nu$ называется *канторовым множеством* (в честь Георга Кантора). Иначе $\mathfrak{K} \subset [0,1]$ можно определить как множество всех чисел $\varkappa \in [0,1]$, которые в троичной системе счисления можно записать при помощи БДД, не содержащей 1, причём не требуется, чтобы эта запись была стандартной (т. е. она может оканчиваться на одни двойки).

**M$15\frac{1}{2}\diamond$12.** Докажите, что канторово множество имеет мощность континуума, но покрывается конечным набором интервалов со сколь угодно малой суммой длин.

**M$15\frac{1}{2}\diamond$13.** Содержит ли канторово множество: **а)** интервалы? **б)** изолированные точки?

**Конденсация несчётных множеств.** Элемент $a \in M$ произвольного несчётного множества $M \subset \mathbb{R}$ называется его *точкой конденсации*, если $D_\varepsilon(a) \cap M$ несчётно $\forall\, \varepsilon > 0$.

**M$15\frac{1}{2}\diamond$14*.** Докажите, что множество точек $b \in M$, не являющихся точками конденсации, конечно или счётно.

**M$15\frac{1}{2}\diamond$15*.** Может ли множество точек конденсации иметь изолированные точки?

**M$15\frac{1}{2}\diamond$16*.** Докажите, что множество точек конденсации замкнуто.

**M$15\frac{1}{2}\diamond$17*.** Докажите, что любое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$ или пусто, или конечно, или счётно, или имеет мощность континуума.