Континуум

Координатные пространства. Координатная прямая $\mathbb{R}^1$ — это множество всех действительных чисел. Аналогично, координатные плоскость $\mathbb{R}^2$, 3-мерное пространство $\mathbb{R}^3$, … , n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$, … суть множества упорядоченных пар (x_1, x_2), троек (x_1, x_2, x_3), … , n-ок $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, … чисел $x_i \in \mathbb{R}$. Множество $\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \ \forall\, i \in \ \}$ называется *единичным n-мерным кубом* в $\mathbb{R}^n$.

М14◇1. Сколько у n-мерного куба **а)** вершин; **б)** рёбер; **в)** $(n-1)$-мерных граней, **г*)** k-мерных граней $(\,0 \leqslant k \leqslant (n-1)\,)$.

М14◇2. Нарисуйте 3-мерную развёртку и общую 2-мерную проекцию 4-мерного куба.

Несчётность и континуальность. Множество называется *несчётным*, если оно бесконечно и не счётно. Про множество, равномощное единичному отрезку говорят, что оно имеет *мощность континуума*.

М14◇3. Всегда ли $N \setminus M$ равномощно M, если M счётно, а N несчётно?

М14◇4. Можно ли нарисовать несчётное множество попарно непересекающихся
а) интервалов на прямой? **б*)** восьмёрок[1] на плоскости? **в*)** букв Т на плоскости?

М14◇5. Имеют ли мощность континуума: **а)** множество бесконечных слов из букв а и б; **б°)** любой отрезок $[a, b]$ (с $a < b$); **в)** любой непустой интервал (a, b); **г)** вся прямая; **д)** m-мерный куб; **е)** множество бесконечных последовательностей вещественных чисел?

Целые и рациональные числа. БДД с нулевой дробной частью называются *целыми*. На координатной прямой множество целых БДД $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ получается откладыванием от 0 всевозможных целых кратных единичного отрезка. БДД $r \in \mathbb{R}$ называется *рациональной*, если $\exists\, k, m \in \mathbb{Z} : kr = m$ в $\mathbb{R}$. Подмножество рациональных БДД $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ на числовой прямой изображается откладыванием от 0 всевозможных отрезков, соизмеримых[2] с единичным.

М14◇6. Докажите, что конечные БДД рациональны. Верно ли, что $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall\, \varepsilon > 0$ существуют $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, такие что $\alpha - \varepsilon < r_1 < \alpha < r_2 < \alpha + \varepsilon$?

М14◇7. Докажите, что множества: **а)** иррациональных **б*)** трансцендентных[3] действительных чисел имеют мощность континуума.

Дедекиндовы сечения. Разбиение $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$ в объединение двух непересекающихся подмножеств, таких что $a_1 < a_2$ для любых $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, называется *сечением* множества $\mathbb{Q}$.

М14◇8. Докажите, что для любого сечения $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$ имеет место равенство $\sup A_1 = \inf A_2$ и выполняется ровно одна из трёх возможностей: либо в A_1 есть максимальный элемент, либо в A_2 есть минимальный элемент, либо действительное число $\sup A_1 = \inf A_2$ иррационально.

М14◇9. Забудем на время про БДД, будем понимать $\mathbb{Q}$ как множество обыкновенных дробей p/q с $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ и назовём действительным числом Дедекинда любое сечение $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$, в котором A_1 не имеет максимального элемента. Дайте определение суммы и произведения действительных чисел Дедекинда (это должно быть сечение нужного типа) и установите сохраняющий арифметические операции изоморфизм между множеством дедекиндовых действительных чисел и множеством действительных чисел, определённом в предыдущем листке посредством БДД[4].

М14◇10. Исходя только из дедекиндова определения действительных чисел (т. е. не пользуясь БДД, но в терминах сечений) докажите теорему о полноте (ср. с зад. М13◇7) и определите квадратные корни (ср. с зад. М13◇9).

---

[1] *восьмёркой* называется любая пара соприкасающихся внешним образом окружностей

[2] два отрезка называются *соизмеримыми*, если они допускают общую единицу измерения — третий отрезок, который целое число раз укладывается в каждом из них

[3] число называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с рациональными коэффициентами; числа, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*

[4] ПОДСКАЗКА: сопоставьте каждому классу эквивалентных БДД $\alpha \in \mathbb{R}$ сечение $\mathbb{Q} = \{\, q \in \mathbb{Q} \mid q < \alpha \,\} \sqcup \{\, q \in \mathbb{Q} \mid q \geqslant \alpha \,\}$