Бесконечные множества

М12◇1°. Придумайте множество A, вложение $A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} A$ и наложение $A \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} A$, которые, однако, не являются *биекциями*. Возможно ли такое для конечного множества A?

М12◇2. Толя рисует на доске 10 крестиков, после чего Коля стирает один из них, затем Толя рисует ещё 10 крестиков, а Коля стирает ещё один крестик и т. д. На первую пару ходов уходит 1 сек., на вторую — пол секунды, на третью — четверть и т. д. Толя выигрывает, если через 2 сек. на доске будет хоть один крестик; в противном случае выигрывает Коля. Кто победит при правильной игре?

М12◇3. Бесконечный направо и вниз лист клетчатой бумаги сплошь заполнен крестиками и ноликами. Всегда ли, глядя на этот лист, можно построить последовательность крестиков-ноликов, не совпадающую ни с одной из строк?

Счётные множества. Множество M называется *счётным*, если оно изоморфно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. Иначе говоря, множество M счётно, если все его элементы можно занумеровать разными натуральными числами, так что все натуральные числа будут при этом израсходованы.

М12◇4. Счётно ли множество: **а)** простых **б)** целых **в)** рациональных чисел?

М12◇5. Счётно ли множество точек координатной плоскости, обе координаты которых **а)** целые **б)** рациональные?

М12◇6. Всегда ли бесконечное подмножество счётного множества счётно?

М12◇7. Является ли счётным объединение **а)** счётного множества с конечным множеством; **б)** конечного числа (например, двух или трёх) счётных множеств; **в)** счётного множества счётных множеств?

М12◇8. Пусть при отображении множеств $A \xrightarrow{f} B$ у каждого $b \in B$ имеется непустое **а)** конечное **б)** конечное или счётное множество прообразов.
Верно ли, что A счётно тогда и только тогда, когда B счётно?

М12◇9. Счётно ли множество **а)** конечных **б)** бесконечных слов из букв а и б ?

М12◇10. Счётно ли множество всех: **а)** конечных **б)** счётных подмножеств счётного множества?

Мощность. Про изоморфные множества говорят, что они *равномощны*. Если множество A изоморфно некоторому подмножеству множества B, но не изоморфно самому B, то говорят, что B *мощнее* A.

М12◇11*. Докажите, что множество отображений из произвольного множества A в любое множество, содержащее не менее двух элементов, мощнее, чем A.

М12◇12*. Докажите, что множество всех подмножеств непустого множества A мощнее, чем A.

М12◇13. Постройте биекцию между отрезком $[0, 1]$ и полуинтервалом $[0, 1)$.

М12◇14* (теорема Кантора - Бернштейна). Докажите, что если множество B равномощно подмножеству множества A, а множество A равномощно подмножеству множества B, то A и B равномощны.

О противоречиях. Высказывание *противоречиво*, если из него следует *ложное утверждение* (т. е. высказывание типа «A и не A»). Из ложного утверждения следует всё что угодно.

М12◇15* (уроки демократии - 2). Был, помнится, в Думе такой меж депутатами разговор:
ж: «*На следующей неделе думу точно распустят!*» з: «*В какой же день?*»
ж: «*Об этом не будет известно даже накануне!*».
Докажите, что высказывания г-на Ж противоречивы.

М12◇16*. Докажите противоречивость таких понятий: **а)** «множество всех множеств»; **б)** «множество всех множеств, задающихся фразой из $\leqslant 2000$ типографских знаков».