Арифметика вычетов

M11◇1 (остаток суммы и произведения). Выразите остатки от деления на n чисел $A+B$ и AB через остатки a и b самих чисел A, B.

M11◇2. Найдите последнюю цифру и остаток от деления на 7 у 1998^{1999} и $1998^{1999^{2000}}$.

M11◇3. Верно ли, что $2222^{5555}+5555^{2222}$ делится на 7, а $2^{70}+3^{70}$ — на 13?

M11◇4. Может ли квадрат натурального числа давать остаток 2 от деления на 6? Какие остатки могут давать квадраты натуральных чисел от деления на 8?

M11◇5. Имеет ли уравнение $x^2+y^2+z^2=2\,xyz$ ненулевые решения в целых числах?

M11◇6. Верно ли, что: **а)** $a^2+b^2 \,\vdots\, 7 \Rightarrow a \,\vdots\, 7$ и $b \,\vdots\, 7$? **б*)** $a^3+b^3+c^3 \,\vdots\, 7 \Rightarrow abc \,\vdots\, 7$? **в*)** $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \,\vdots\, 9 \Rightarrow abcde \,\vdots\, 9$?

Арифметика вычетов по модулю 7 (или ***7-арифметика***) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ состоит из семи «чисел» — остатков от деления на 7 (мы будем обозначать их $[0]_7$, $[1]_7$, … , $[6]_7$). По определению, $[x]_7+[y]_7$ есть остаток от деления на 7 суммы $x+y$, а $[x]_7\cdot[y]_7$ — остаток произведения xy.

M11◇7. Составьте для 7-арифметики таблицы сложения и умножения и проверьте, что эти операции подчиняются обычным переместительному, сочетательному и распределительному законам. Дайте определение противоположного числа $-a$ и обратного числа a^{-1} к данному числу $a\in\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Составьте таблицы противоположных и обратных чисел. Справедливы ли в 7-арифметике тождества $(-1)\cdot a=-a$ и $(-a)\cdot(-b)=ab$?

M11◇8. Дайте определение n-арифметики $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и составьте таблицы сложения и умножения для 5-, 6- и 8-арифметик. Верно ли, что при умножении в n-арифметике
а) у всех ненулевых чисел есть обратные **б)** «минус» на «минус» даёт «плюс»
в) $a\neq 0$ и $b\neq 0 \Rightarrow ab\neq 0$ **г)** $ab=ac$ и $a\neq 0\Rightarrow b=c$ **д)** $a\neq 0\Rightarrow a^n\neq 0\ \forall\, n\geqslant 1$
е) степени a^0, a^1, a^2, a^3, … любого $a\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ всегда «зацикливаются»?

M11◇9. Вычислите сумму всех чисел n-арифметики. Делится ли $1^3+2^3+\cdots+28^3$ на 29?

M11◇10 (позиционные признаки делимости). Вычислите остатки всех степеней десятки от деления на 2, 5, 4, 3, 9, 11, 7 и скажите, как глядя на цифры десятичной записи данного числа (скажем, $\overline{abcdefghi}$) узнать, делится ли оно на 2, 5, 4, 3, 9, 11, 7?

M11◇11. У каких чисел 5-, 6- и 8-арифметик есть обратные (такие числа называются *обратимыми*)? Укажите эти обратные явно.

M11◇12. Докажите, что следующие свойства $a\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ попарно эквивалентны:
а) a обратим; **б)** отображение умножения на a: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\xrightarrow{x\mapsto ax}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ взаимно однозначно;
в) $ax=0\Rightarrow x=0$; **г)** $ax=ay\Rightarrow x=y$; **д)** $\forall y\ \exists x:\ ax=y$; **е)** $\text{НОД}(a,n)=1$.

M11◇13* (теорема Вильсона). Чему равно произведение всех ненулевых чисел n-арифметики при простом и составном n? Верно ли, что натуральное число $p\geqslant 2$ просто, если и только если оно делит $(p-1)!+1$?

M11◇14* (гомоморфизм Фробениуса). Пусть p – простое. Докажите, что C_p^k делится на p при всех $1<k<p$ и что в p-арифметике выполнено тождество $(a+b)^p=a^p+b^p$.

M11◇15* (малая теорема Ферма). Докажите, что для любого $a\in\mathbb{N}$ и простого p степень a^p имеет тот же остаток от деления на p, что и a.