Простые числа и разложение на множители

Число $p\in\mathbb{Z}$ называется *простым*, если оно делится только на ±1 и $\pm p$.

М$11\frac{1}{2}\diamond$1. Найдите все простые числа, которые одновременно представляются в виде суммы и в виде разности двух простых чисел.

М$11\frac{1}{2}\diamond$2. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

М$11\frac{1}{2}\diamond$3. Существуют ли на числовой прямой сколь угодно длинные отрезки, не содержащие ни одного простого числа?

М$11\frac{1}{2}\diamond$4*. Верно ли, что среди чисел вида **а)** $2^{2^k}-1$ **б)** $1\overbrace{00\ldots00}^{k}3$ **в)** $\overbrace{33\ldots33}^{k}1$ имеется бесконечно много составных?

М$11\frac{1}{2}\diamond$5 (основное свойство простых чисел). Пусть $p\in\mathbb{Z}$ простое. Докажите, что $\forall\, a,b\in\mathbb{Z}$ произведение ab делится на p только если a или b делится на p. Бывают ли непростые числа p с таким свойством?

М$11\frac{1}{2}\diamond$6. Пусть $p>0$ простое. Существуют ли $x,y\in\mathbb{N} : x^2=p\,y^2$?

М$11\frac{1}{2}\diamond$7*. Существуют ли $n\geqslant 1$ различных простых чисел $p_1,p_2,\ldots,p_n$ и рациональные числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, для которых $\lambda_1\sqrt{p_1}+\lambda_2\sqrt{p_2}+\cdots+\lambda_n\sqrt{p_n}$ рационально? Это весьма трудная задача. Попытайтесь решить её хотя бы для $n=1,2,3$.

М$11\frac{1}{2}\diamond$8 (факториальность $\mathbb{Z}$). Докажите, что любое целое число z можно представить в виде произведения $z=\pm p_1p_2p_3\cdots p_s$, в котором все сомножители суть натуральные простые числа (не обязательно разные), и любые два таких разложения (например, полученные разными способами) могут различаться *только порядком следования множителей*.

М$11\frac{1}{2}\diamond$9. Разложите на простые множители все числа A, B из зад. М3$\diamond$6.

М$11\frac{1}{2}\diamond$10. Сколько различных натуральных делителей у числа: **а)** 27; **б)** 35; **в)** 67500; **г)** $p_1^{m_1}p_2^{m_2}p_3^{m_3}\cdots p_s^{m_s}$ (p_ν — попарно разные простые).

М$11\frac{1}{2}\diamond$11. Найдите все кратные 30 числа с ровно тридцатью натуральными делителями.

М$11\frac{1}{2}\diamond$12*. Перечислите все $n\in\mathbb{N}$, имеющие не менее $\sqrt{n}$ натуральных делителей.

Функция Эйлера. Обозначим через $\varphi(n)$ количество обратимых чисел в n-арифметике (т. е. количество всех не превосходящих n натуральных чисел, взаимно простых с n, см. зад. М11$\diamond$12). Отображение $n\mapsto\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера*.

М$11\frac{1}{2}\diamond$13. Изобразим числа n-арифметики $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ точками, зафиксируем какое-либо одно число $a\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, и из каждой точки $x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ проведём стрелку в точку ax. Докажите, что если a обратим, то на этой картинке движение по стрелкам распадается на непересекающиеся циклы, причём каждый цикл, содержащий хоть одно обратимое число, весь состоит из обратимых чисел, и все циклы, состоящие из обратимых чисел, имеют одинаковую длину.

М$11\frac{1}{2}\diamond$14 (теорема Эйлера). Используя предыдущую задачу, докажите, что для любых взаимно простых $a,b\in\mathbb{N}$ число $a^{\varphi(b)}$ имеет остаток 1 от деления на b.

М$11\frac{1}{2}\diamond$15. Вычислите $\varphi(n)$ для **а)** $n=36$ **б)** $n=p^k$ (p – простое) **в)** $n=p_1p_2p_3\cdots p_s$ **г*)** $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}p_3^{m_3}\cdots p_s^{m_s}$ (p_ν попарно разные простые).