Мультиномиальные коэффициенты

M10◇1. Сколько слагаемых получится, если раскрыть скобки и привести подобные у $(a+b+c)^5$? Будут ли среди них a^2bc^2 и ab^2c^3, и если да, то с каким коэффициентом?

M10◇2. Какие одночлены и с какими коэффициентами получатся после раскрытия скобок и приведения подобных у **а)** $(1+x)^n$; **б)** $(a+b)^n$; **в)** $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^2$; **г)** $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$; **д)** $(1+x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$.

Биномиальные коэффициенты и числа сочетаний. Коэффициент при x^k, получающийся после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых у $(1+x)^n$, называется *биномиальным коэффициентом* и обозначается $\binom{n}{k}$ (обратите внимание, что $\binom{n}{k}=0$ при $k<0$ и $k>n$ и $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=\binom{0}{0}=1$). Количество слов, которые можно получить, переставляя буквы в n-буквенном слове аа...абб...б, содержащем k букв а и $(n-k)$ букв б, называется *числом сочетаний* из n по k и обозначается C_n^k.

M10◇3°. Докажите, что $\binom{n}{k}=C_n^k$ и совпадает с числом путей из зад. M7◇12, ведущих в k-тую комнату на n-том этаже. Верно ли, что $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$?

M10◇4°. Выразите $\binom{n}{k}$ явно через n и k и вычислите для $0\leqslant n\leqslant 15$ и всех $0\leqslant k\leqslant n$.

M10◇5. Из произвольной последовательности чисел $A_0, A_1, \ldots, A_n$ строят новую последовательность $A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, \ldots, A_{n-1}^{(1)}$, состоящую из сумм соседних элементов: $A_i^{(1)}=A_i+A_{i+1}$. Затем строят следующую последовательность $A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, \ldots, A_{n-2}^{(2)}$ с $A_i^{(2)}=A_i^{(1)}+A_{i+1}^{(1)}$ и т. д. пока не получится последовательность $A_0^{(n)}$, состоящая из одного числа. Выразите его через исходные числа $A_0, A_1, \ldots, A_n$ явной формулой.

Треугольник Паскаля — это бесконечный вниз числовой треугольник на рис. 10.1. Его строки нумеруются сверху вниз, начиная с нуля, а числа в каждой строке — слева направо, также начиная с нуля; k-е число n-того этажа — это $C_n^k=\binom{n}{k}$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\iddots & & \iddots & & \iddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots
\end{array}
$$

Рис. 10.1. Треугольник Паскаля

M10◇6. Найдите в треугольнике Паскаля числа: натуральные 1, 2, 3, ..., треугольные: T_1, T_2, T_3, ... и «пирамидальные» Π_1, Π_2, Π_3, ... (они составляются из треугольных по правилу $\Pi_k \overset{\text{def}}{=} T_1+T_2+\cdots+T_k$). Вычислите сумму[1]: $C_k^0+C_{k+1}^1+\cdots+C_{k+n}^n$.

M10◇8. Вычислите суммы: **а)** $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$; **б)** $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n$.

M10◇9. Вычислите суммы: **а)** $C_n^0+C_{n-1}^1+C_{n-2}^2+\cdots$ **б)** $C_n^0+C_{n+1}^2+C_{n+2}^4+\cdots$ **в)** $C_n^1+2\,C_n^2+\cdots+n\,C_n^n$ **г)** $C_n^0+2\,C_n^1+\cdots+(n+1)\,C_n^n$ **д*)** $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$.

M10◇10. Выразите $(n+1)^{k+1}-n^{k+1}$ в виде многочлена от n. Покажите, что сумма k-тых степеней первых n натуральных чисел является многочленом $(k+1)$-ой степени от n. Найдите его старший коэффициент и свободный член.

M10◇11*. Для $k=5$ выпишите многочлены из зад. M10◇10 явно.

---

[1] С этой задачей связана такая многомерная геометрия:

M10◇7*. Двумерная пирамида высоты k — это треугольник: $\Pi_k^{(2)} \overset{\text{def}}{=} T_k$. Трёхмерная пирамида высоты k состоит из сложенных в стопку треугольников $\Pi_k^{(3)} \overset{\text{def}}{=} T_1+T_2+\cdots+T_k$. Четырёхмерная пирамида высоты k состоит из сложенных в стопку вдоль «четвёртой координатной оси» трёхмерных пирамид: $\Pi_k^{(4)} \overset{\text{def}}{=} \Pi_1^{(3)}+\Pi_2^{(3)}+\cdots+\Pi_k^{(3)}$. Что такое m-мерная пирамида высоты k и сколько m-мерных кубиков уйдёт на её постройку? Из двух двумерных пирамид складывается прямоугольник: $T_k+T_k=k\times(k+1)$. Можно ли из шести трёхмерных пирамид $\Pi_k^{(3)}$ сложить параллелепипед $k\times(k+1)\times(k+2)$? Из скольких m-мерных пирамид высоты k следует пытаться собирать m-мерный параллелепипед и каковы будут его размеры?