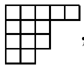
# Как сравнивать множества

*По пыльной тропинке далёкой планеты бредёт стадо семиногих пятихвосток.*
*Сколько ног приходится на каждую сотню хвостов ?*
*(детская загадка)*

**M9◇1.** Сколько всего разных **а)** любых **б)** инъективных **в)** сюрьективных **г)** биективных отображений можно построить из $n$-элементного множества в $m$-элементное?

**Прообразы.** Если задано отображение $A \xrightarrow{f} B$, то $\forall\, b \in B$ множество $f^{-1}(b) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, a \in A \mid f(a) = b \,\} \subset A$ называется *полным прообразом* $b$, а его элементы — *прообразами* $b$. У разных $b \in B$ может быть разное число (в том числе и нуль) прообразов. Если каждый $b \in B$ имеет ровно $m$ прообразов, то отображение $f$ называется *$m$-листным накрытием*[1].

**M9◇2.** Как изменятся ответы в зад. M7◇3, если букву `о` и букву `к` обе заменить буквой `ы`? Сколько слов можно получить переставляя буквы в словах: **а)** `кок`, **б)** `курок`, **в)** `СССР`, **г)** `колобок`, **д)** `рефрижератор`, **е)** $\underbrace{\texttt{аа}\ldots\texttt{а}}_{\alpha}\underbrace{\texttt{бб}\ldots\texttt{б}}_{\beta}$, **ж)** $\underbrace{\texttt{a}_1\texttt{a}_1\ldots\texttt{a}_1}_{m_1}\underbrace{\texttt{a}_2\texttt{a}_2\ldots\texttt{a}_2}_{m_2}\ldots\underbrace{\texttt{a}_k\texttt{a}_k\ldots\texttt{a}_k}_{m_k}$?

**Диаграмма Юнга** — это картинка типа , состоящая из выровненных по левому краю горизонтальных клеточных полосок, длина которых сверху вниз не возрастает.

**M9◇3.** Имеется 5 разноцветных чашек, 7 разноцветных соломинок, 4 одинаковых стакана и 6 одинаковых кусков сахара. Сколькими способами можно разложить[2]: **а)** сахар по чашкам? **б)** соломинки по чашкам? **в*)** сахар по стаканам? **г*)** соломинки по стаканам?

**M9◇4.** Как изменятся ответы в зад. M9◇3, если запретить пустые ёмкости?

**M9◇5.** Сколько имеется одночленов степени $d$ от **а)** двух **б)** трёх **в)** $n$ переменных?

**M9◇6.** Цело ли число $1000!/10!^{100}$ ?

**M9◇7.** Сколько получится слагаемых, если тупо раскрыть скобки у $(a+b+c)^3$? Какие одночлены и с какими коэффициентами останутся после приведения подобных?

**M9◇8.** Между какими из перечисленных ниже множеств имеется изоморфизм? Постройте эти изоморфизмы явно. Сколько элементов в каждом множестве?

**а)** значки, которые можно высвечивать, зажигая ровно 12 лампочек на прямоугольном табло, имеющем 5 рядов по 4 лампочки в каждом;

**б)** способы раскладывания 8 одинаковых кусков сахара по 13 разным чашкам;

**в)** слова, которые получаются при перестановке букв в слове `ааааааааббббббббббббб`;

**г)** маршруты из зад. M7◇12, приводящие шарик в 12-ю комнату на 20-м этаже (этажи и комнаты нумеруются сверху вниз и слева направо, начиная с нулевого номера);

**д)** одночлены $a^8b^{12}$, которые получатся если тупо раскрыть скобки у $(a+b)^{20}$ и не приводить подобные слагаемые;

**е)** диаграммы Юнга высоты $\leqslant 8$ и ширины $\leqslant 12$.

**M9◇9*.** Грани кубика раскрашивают в 6 фиксированных разных цветов (разные – в разные). Сколько разных кубиков может получиться?

**M9◇10*.** Как изменится ответ, если шестью цветами раскрашивать не кубик, а тетраэдр?

**M9◇11*.** Сколько разных игрушек получится, если в предыдущих двух задачах склеивать крашеные кубики (соотв. тетраэдры) по два грань к грани?

---

[1] в частности, однолистные накрытия — это в точности взаимно однозначные отображения

[2] две раскладки одинаковы, если они получаются друг из друга передвиганием ёмкостей по столу без изменения их содержимого.