# Геометрические прогрессии

*В банке живут бактерии и каждый день их число удваивается, так что за неделю банка заполняется бактериями целиком. За сколько дней бактерии заполнят полбанки?*

**Геометрическая прогрессия** — это (конечный или бесконечный) набор занумерованных *ненулевых* чисел $\dots, g_1, g_2, g_3, \dots$, в котором отношение $q = g_k/g_{k-1}$ между двумя соседними числами одинаково для всех $k$; оно называется *знаменателем* прогрессии.

**М6◇1°.** Будет ли геометрической прогрессией последовательность, $k$-тый член которой равен: **а)** $0,\underbrace{0\dots0}_{k}3$; **б)** $3^{-k}$; **в)** $\underbrace{33\dots3}_{k}$; **г)** $\sqrt[k]{3}$; **д)** $g'_k \cdot g''_k$, где $g'_k$, $g''_k$ – геометрические прогрессии; **е)** $\vartheta^{a_k}$, где $\vartheta \neq 0$, и $a_k$ — арифметическая (скажем, целочисленная) прогрессия.

**М6◇2.** Можно ли разбить $\mathbb{N}$ в объединение **а)** конечного **б)** бесконечного набора попарно непересекающихся бесконечных геометрических прогрессий?

**М6◇3.** Какие из перечисленных ниже свойств набора положительных чисел $g_0, g_1, \dots, g_n$ необходимы, а какие достаточны для того, чтобы этот набор был геометрической прогрессией? **а)** любой элемент (кроме крайних) есть среднее геометрическое двух соседних; **б)** $g_i^2 = g_{i-2}g_{i+2}$ при всех $2 \leqslant i \leqslant n-2$; **в)** $g_i g_{n-i}$ одинаково для всех $0 \leqslant i \leqslant n$.

**М6◇4.** Верно ли, что $a^m - b^m$ делится на $(a-b)$, буде эта разность ненулевая? Если да, то чему равно частное? Что можно утверждать про $a^m + b^m$?

**М6◇5.** Вычислите сумму $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$. Обобщение: выразите сумму всех элементов конечной геометрической прогрессии через начальный член, количество слагаемых и знаменатель.

**М6◇6.** Найдите суммы: **а)** $1+2\,q+3\,q^2+\cdots+(n+1)\,q^n$ **б)** $1\cdot2+2\cdot3\,q+3\cdot4\,q^2+\cdots+(n+1)(n+2)\,q^n$.

**М6◇7.** Из пункта $A$ в пункт $B$ со скоростью 5 км/час вышел Толя, а через три часа вслед за ним со скоростью 7 км/час отправился Коля и – со скоростью 12 км/час – его собачка Жучка, которая догнала Толю, мгновенно развернулась и побежала назад к Коле, встретив его, снова развернулась и снова догнала Толю и т. д. Какое расстояние пробежит Жучка пока Коля догонит Толю? Какая прогрессия при этом просуммировалась?

**М6◇8.** Догнав Толю, Коля стал делиться с ним завтраком: в первую минуту он разделил его пополам и успел съесть треть своей половины, а Толя свою – целиком. В следующие полминуты Коля разделил пополам остатки своей доли и опять успел съесть треть, а Толя – всё. Далее процесс повторялся (и каждая следующая стадия происходила вдвое быстрее предыдущей). Через какое время завтрак будет съеден и какая его часть достанется Коле, а какая – Толе?

**М6◇9.** Назовём *суммой* бесконечной убывающей положительной геометрической прогрессии $g_0, g_1, g_2, \dots$ наименьшее число, большее любой конечной суммы $g_0 + \cdots + g_n$. Докажите, что такое число существует и выразите его через начальный член и знаменатель прогрессии.

**М6◇10.** К большему катету прямоугольного треугольника со сторонами 1, 2, $\sqrt{3}$ подклеили равную ему по длине гипотенузу подобного треугольника. Затем к большему катету второго треугольника аналогичным образом подклеили гипотенузу третьего треугольника, подобного первым двум, и так далее до бесконечности. Чему равна площадь получающегося завитка?

**М6◇11.** Всегда ли при делении натуральных чисел «уголком» получится либо конечная, либо бесконечная *периодическая* десятичная дробь? Можно ли таким образом получить дроби **а)** $0,575757\dots$; **б)** $19,9919991999\dots$; **в)** $2,43575757\dots$ ?

**М6◇12.** Докажите, что периодическая дробь $\overline{0,a_1\dots a_n\,b_1\dots b_m\,b_1\dots b_m\,\dots}$ есть результат деления числа $\overline{a_1\dots a_n\,b_1\dots b_m} - \overline{a_1\dots a_n}$ на число $\underbrace{9\dots9}_{m}\underbrace{0\dots0}_{n}$.