Важные квадратичные соотношения

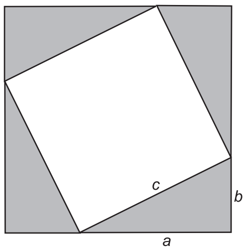

Рис. 5.1.

М5◇1. Пользуясь тем, что из четырёх одинаковых прямоугольных треугольников с катетами a, b и гипотенузой c можно сложить квадрат как на рис. 5.1, докажите, что $a^2 + b^2 = c^2$.

М5◇2. Докажите, что у пифагоровых штанов на рис. 5.2 квадрат гипотенузы равносоставлен сумме квадратов катетов (этот факт известен как *теорема Пифагора*).

Среднее геометрическое (или среднее пропорциональное) двух положительных чисел m и n — это такое положительное число q, что $q^2 = mn$ (или иначе $n : q = q : m$).

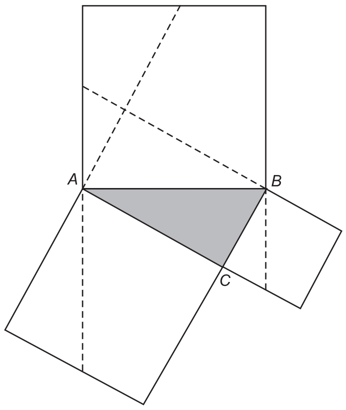

Рис. 5.2.

М5◇3. Докажите, что если положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $c^2 = a^2 + b^2$, то можно построить единственный треугольник со сторонами a, b и c, и этот треугольник автоматически будет прямоугольным.

М5◇4. Докажите, что на рис. 5.3 квадрат высоты прямоугольного треугольника равносоставлен прямоугольнику, стороны которого суть отрезки, на которые высота разбивает гипотенузу.

М5◇5. Докажите, что на рис. 5.4 квадрат катета равносоставлен прямоугольнику, стороны которого суть гипотенуза и её отрезок, заключённый между этим катетом и высотой.

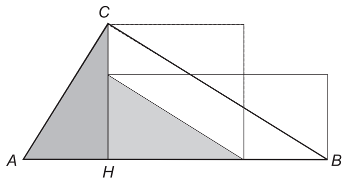

Рис. 5.3.

М5◇6. Двумя способами — с помощью предыдущих задач и через подходящие подобные треугольники — выясните, выполняются ли в произвольном прямоугольном $\triangle ABC$ с гипотенузой AB и высотой CH соотношения: **а)** $|AH| : |CH| = |CH| : |HB|$; **б)** $|AH| : |AC| = |AC| : |AB|$ **в)** $|BH| : |CB| = |CB| : |AB|$.

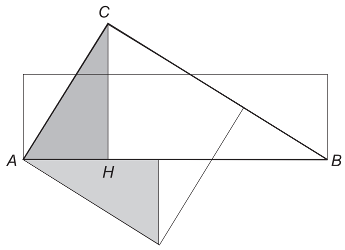

Рис. 5.4.

М5◇7. Глядя на рис. 5.5 циркулем и линейкой постройте арифметическое и геометрическое средние двух отрезков $a = AP$ и $b = PB$. Докажите, что геометрическое среднее двух положительных чисел не превосходит арифметического, и опишите все случаи их равенства.

М5◇8. Даны отрезок длины 1 и отрезок длины a. Циркулем и линейкой постройте отрезок, длина которого равна **а)** $\sqrt{3}$ **б)** $\sqrt{19}$ **в)** $\sqrt{a}$ **г)** a^2.

М5◇9. Дан квадрат. Циркулем и линейкой постройте новый квадрат, площадь которого относится к площади данного как $m : n$.

М5◇10. Даны отрезки длины 1, p и q. Циркулем и линейкой постройте корни уравнений $x^2 + px - q = 0$ и $x^2 - px - q = 0$.

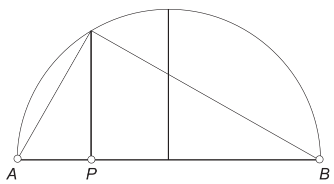

Рис. 5.5.

М5◇11. Докажите, что в любом $\triangle ABC$ с высотой AH выполнено соотношение $|AB|^2 - |AC|^2 = |BH|^2 - |CH|^2$.

М5◇12. Выразите сумму квадратов диагоналей параллелограмма через его стороны.

М5◇13. Выразите диаметр круга, вписанного в равнобокую трапецию, через её основания.

М5◇14. Выразите **а)** медиану **б)** высоту **в*)** биссектрису **г*)** площадь произвольного треугольника через длины его сторон.