Равносоставленность и площади

М4◇1. Нарисуйте на листе клетчатой бумаги оси координат и отметьте точки $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$, $D(2,5)$, $E(0,5)$, $F(-7,7)$, $G(-5,4)$. Допустим, что на закрашивание одной клетки тратится 1 пиколитр чернил. Сколько чернил уйдёт на закрашивание многоугольников: CED, ADE, AEC, ECG, $ABDE$, $GCEF$, $ACEFG$?

М4◇2. Рассмотрим на координатной плоскости точки $O(0,0)$ и $A(4,3)$. Достройте отрезок OA до квадрата $OABC$ и вычислите $S(OABC)$ и $|OA|$.

М4◇3. Чему равен квадрат расстояния от начала координат до произвольной точки P с координатами (p_1, p_2) и чему равен квадрат расстояния между P и другой произвольной точкой $Q(q_1, q_2)$?

М4◇4. Нарисуйте ГМТ с координатами (x, y), удовлетворяющими соотношениям:
а) $x^2 + y^2 = 1$ **б)** $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 16$ **в)** $x^2 + y^2 + 1 = 2(y - 3x)$

М4◇5. Вершины параллелограмма $ABCD$ имеют координаты $A(1,5)$, $B(-3,2)$, $C(4,-1)$. Найдите координаты вершины D и $S(ABCD)$.

М4◇6*. Вершины параллелограмма $OAPB$ имеют координаты $O(0,0)$, $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$. Выразите координаты вершины P и $S(OAPB)$ через a_1, a_2, b_1 и b_2.

Свойства площадей. Многие плоские фигуры $\mathfrak{F}$ имеют площадь $S(\mathfrak{F})$. Например, площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab. Площади равных фигур равны. Фигуры равной площади называются *равновеликими*. Если фигура $\mathfrak{F}$ разрезана прямолинейным разрезом на две части $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ и из трёх фигур $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ какие-то две имеют площадь, то её имеет и третья, причём $S(\mathfrak{F}) = S(\mathfrak{F}_1) + S(\mathfrak{F}_2)$. Две фигуры называются *равносоставленными*, если одну из них можно конечным числом прямолинейных разрезов разбить на части, из которых складывается другая фигура. Площади равносоставленных фигур равны.

М4◇7. Равновелики ли на рис. 4.1 параллелограммы соответствующим прямоугольникам? Выразите площадь параллелограмма через основание и высоту.

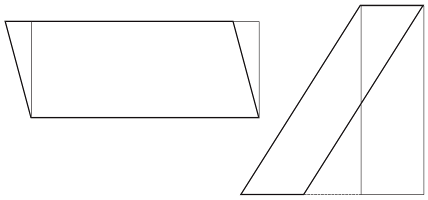

Рис. 4.1.

М4◇8. Выразите площади треугольника и трапеции через высоты и основания.

М4◇9. Существует ли такой треугольник с высотами h_1, h_2, периметром P и площадью S, что: **а)** $P > 1\,м$ $S < 1\,см^2$? **б)** $S > 1\,м^2$ $P < 1\,см$? **в)** $h_1 \geqslant 1\,м$ $h_2 \geqslant 1\,м$ $S \leqslant 1\,см^2$?

М4◇10. Пусть длины последовательных сторон (скажем, по часовой стрелке) произвольного выпуклого четырёхугольника равны a, b, c, d. Может ли его площадь быть больше, чем
а) $(ab + cd)/2$? **б)** $(ac + bd)/2$?

М4◇11. Выразите площадь произвольного четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями через длины диагоналей.

М4◇12. Выразите площадь треугольника через длины сторон и радиус
а) вписанного **б)** вневписанного круга.

М4◇13. Зависит ли сумма расстояний от точки, лежащей внутри правильного треугольника, до его сторон от выбора этой точки?

М4◇14. Верно ли, что медианы разрезают треугольник на 6 равновеликих треугольников?

М4◇15*. Треугольник разрезали на три меньших, соединив вершины с некой внутренней точкой. Верно ли, что они равновелики только если эта точка — пересечение медиан?