Геометрия на клетчатой бумаге

М$4\frac{1}{2}\diamond$1*. Математический бильярд — это квадрат $ABCD$ с точечными лузами в вершинах. Точечный шар выпустили из середины стороны AD в направлении точки E, которая делит противоположную сторону в отношении $BE : EC = 43 : 57$. Попадёт ли он когда-нибудь в лузу? Если нет – почему, если да – после скольких отражений[1] от стенок?

М$4\frac{1}{2}\diamond$2*. Существует ли параллелограмм площади 4 кл. с центром в узле клетчатой бумаги, не содержащий никаких других узлов ни внутри, ни на границе?

Формула Пика сопоставляет любому (не обязательно выпуклому) несамопересекающемуся многоугольнику $\mathfrak{M}$ с вершинами в узлах клетчатой бумаги число

$$\Pi(\mathfrak{M}) \stackrel{\text{def}}{=} (\text{ число узлов внутри } \mathfrak{M}\,) + \frac{1}{2}\,(\text{ число узлов на границе } \mathfrak{M}\,) - 1\,.$$

и утверждает, что $S(\mathfrak{M}) = \Pi(\mathfrak{M})$. Она доказывается в следующих двух задачах:

М$4\frac{1}{2}\diamond$3. Многоугольник $\mathfrak{M}$ разрезали прямолинейным разрезом на два многоугольника $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ тоже с вершинами в узлах. Верно ли, что $\Pi(\mathfrak{M}) = \Pi(\mathfrak{M}_1) + \Pi(\mathfrak{M}_2)$?

М$4\frac{1}{2}\diamond$4. Последовательно докажите формулу Пика для:

а) прямоугольника со сторонами по линиям клеток;

б) для прямоугольного треугольника с катетами по линиям клеток;

в) для любого треугольника; **г)** для выпуклого многоугольника; **д*)** в общем виде.

М$4\frac{1}{2}\diamond$5. Может ли треугольник с площадью 1 кл. и вершинами в узлах содержать узлы строго внутри себя? Может ли он иметь сколь угодно большой периметр?

М$4\frac{1}{2}\diamond$6. Верно ли, что любой отрезок с концами в узлах, но не содержащий узлов внутри себя, можно достроить до треугольника площади 1 кл. с вершинами в узлах?

М$4\frac{1}{2}\diamond$7. Может ли параллелограмм с площадью 1 кл. и вершинами в узлах накрывать какие-либо узлы кроме вершин? Может ли расстояние между наиболее удалёнными друг от друга вершинами такого параллелограмма быть сколь угодно большим?

М$4\frac{1}{2}\diamond$8. Прямая ℓ соединяет узлы с координатами $(0,0)$ и (p,q), причём между этими узлами на прямой ℓ нет других узлов. Есть ли среди не лежащих на ℓ узлов ближайшие к ней и много ли их может быть? Найдите расстояние от такого узла до прямой ℓ.

М$4\frac{1}{2}\diamond$9 (задача о кузнечиках). Трёх кузнечиков посадили в точки с координатами $(0,1)$, $(1,1)$ и $(1,0)$ и позволили прыгать друг через друга в первом квадранте по следующему правилу: в каждый момент один из векторов, соединяющих начало координат с кузнечиками, находится между двумя другими, и любой из двух «крайних» кузнечиков может центрально симметрично отразиться от этого «среднего». Покажите, что:

а) начало координат и кузнечики всегда находятся в вершинах параллелограмма единичной площади, и никаких других целых точек этот параллелограмм не накрывает;

б) кузнечики могут побывать только в точках с взаимно простыми координатами;

в) для каждой точки с взаимно простыми координатами имеется единственный способ прыгания, приводящий одного из кузнечиков в эту точку.

М$4\frac{1}{2}\diamond$10*. Каждый узел клетчатой бумаги накрыли кругом, центр которого находится в этом узле а радиус в 1999^{2000} раз меньше ширины клеток. Можно ли из начала координат выпустить луч, не пересекающий ни одного (кроме накрывающего начало) круга?

М$4\frac{1}{2}\diamond$11. Пусть p_1, p_2 — любые, а q_1, q_2 — положительные числа. Опишите все случаи, когда $\dfrac{p_1}{q_1} + \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$. Какими неравенствами связаны эти три дроби в остальных случаях?

---

[1] предполагается, что при каждом ударе о стенку «угол падения равен углу отражения»