НОД, НОК и деление с остатком

В решениях задач этого листка словосочетания «простое число» и «простые множители» запрещены.

Прошу — забудь всё, чему ты учился в школе; потому что ты этому не научился.
(Э. Ландау, «Основы анализа»)

М3◇1°. Какое наименьшее расстояние можно отложить от данной точки на прямой, пользуясь двумя шаблонами (без делений) длины **а)** 13 *см* и 29 *см*; **б)** 21 *см* и 30 *см*?

М3◇2. Пусть $A, B \in \mathbb{Z}$ — два фиксированных целых числа. Обозначим через $\mathfrak{I} \subset \mathbb{Z}$ множество всех чисел n, которые можно отложить на числовой прямой от нуля, используя шаблоны[1] A и B. Пусть D — это *наименьшее положительное* число в $\mathfrak{I}$. Верно ли, что:

а) A, B, а также суммы, разности и любые целые кратные чисел из $\mathfrak{I}$ лежат в $\mathfrak{I}$?

б) Все числа из $\mathfrak{I}$ (в частности, A и B) нацело делятся на D?

в) Все числа из $\mathfrak{I}$ (в частности, D) нацело делятся на любой общий делитель чисел A и B?

НОД и НОК. Наибольшее натуральное число D, которое делит каждое из чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n$, называется их *наибольшим общим делителем* и обозначается $\text{нод}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Аналогично, наименьшее натуральное число K, которое делится на все числа A_i называется их *наименьшим общим кратным* и обозначается $\text{нок}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

М3◇3. Рассуждая как в зад. М3◇2, покажите, что $\text{нод}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ делится нацело на любой другой общий делитель чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и представляется в виде $z_1A_1 + z_2A_2 + \cdots + z_nA_n$ с целыми z_ν. Верно ли, что $\text{нод}(A \pm B, B) = \text{нод}(A, B)$?

М3◇4. Докажите, что $\text{нок}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ делит нацело любое другое общее кратное чисел A_i и что $\text{нок}(A, B) \cdot \text{нод}(A, B) = A \cdot B$.

М3◇5 (алгоритм Евклида). Пусть $A > B$ — два фиксированных натуральных числа. Определим последовательность чисел $E_0, E_1, E_2, E_3, \ldots$ правилами: $E_0 = A$, $E_1 = B$, $E_k =$ (остатку от деления E_{k-2} на E_{k-1}) при $k \geqslant 2$. Докажите, что все числа E_ν лежат в множестве $\mathfrak{I}$ из зад. М3◇2 и монотонно убывают до тех пор, пока очередное $E_{\nu+1}$ не обратится в нуль (т. е. пока $E_{\nu-1}$ не разделится нацело на E_ν). Как связано это последнее ненулевое E_ν с $\text{нод}(A, B)$?

М3◇6. Вычислите $\text{нод}(A, B)$ и подберите целые x, y так, чтобы $x\,A + y\,B = \text{нод}(A, B)$, для следующих пар (A, B): **а)** $(17,\ 13)$; **б)** $(44\,863,\ 70\,499)$; **в)** $(8\,385\,403,\ 2\,442\,778)$.

Взаимная простота. Если $\text{нод}(a, b) = 1$ для $a, b \in \mathbb{Z}$, то числа a, b называются *взаимно простыми*.

М3◇7. Докажите, что взаимная простота a и b равносильна существованию таких $x, y \in \mathbb{Z}$, что $a\,x + b\,y = 1$, и равносильна возможности представить любой $z \in \mathbb{Z}$ в виде $z = a \cdot k + b \cdot m$ с подходящими $k, m \in \mathbb{Z}$.

М3◇8. Пусть c взаимно просто с a, а b – любое. Докажите, что

а) если произведение ab делится на c, то b делится на c;

б) если b делится как на a, так и на c, то b делится и на произведение ac.

М3◇9. Верно ли, что несократимая дробь p/q (где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) может быть корнем многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами, только если $a_0 \vdots q$ и $a_n \vdots p$?

М3◇10. Верно ли, что $\text{нок}(a, b)/a$ и $\text{нок}(a, b)/b$ взаимно просты при любых $a, b \in \mathbb{N}$?

М3◇11. Верно ли, что $\forall\, a \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много $b \in \mathbb{N}$, таких что $b + a$ и $b - a$ взаимно просты? Всегда ли взаимно просты a и $a + 1$?

М3◇12. Найдите *все* целые решения уравнений:

а) $1537\,x + 1387\,y = 1$ **б)** $5\,x + 7\,y = 11$ **в)** $26\,x + 32\,y = 60$ **г)** $169\,x + 221\,y = 26$

М3◇13. Чему равно k-е натуральное число, одновременно дающее остатки:

а) 1, 2, 3 от деления, соответственно, на 2, 3 и 5?

б) 2, 4, 6, 8 от деления, соответственно, на 5, 9, 11 и 14?

---

[1] иначе говоря, $\mathfrak{I}$ состоит из всех чисел n, представимых в виде $n = k\,A + m\,B$ с целыми k и m