Суммирование разностей

Арифметическая прогрессия — это (конечный или бесконечный) набор $\ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots$ занумерованных чисел, в котором разность $d = a_k - a_{k-1}$ между двумя соседними числами одинакова для всех k; она называется *разностью* или *приращением* прогрессии.

М2◇1°. Будет ли арифметической прогрессией последовательность с k-тым членом, равным:
а) $\underbrace{11\ldots1}_{k}$, **б)** $\dfrac{1+2+\cdots+k}{k}$, **в)** k-тому натуральному числу, оканчивающемуся на 13?

М2◇2°. Выразите n-тый член произвольной арифметической прогрессии через первый член и разность. Чему равно 91-е натуральное число, большее 444, с остатком 43 от деления на 57?

М2◇3. В некой арифметической прогрессии $a_m = -a_n$ для каких-то $m < n$. При каких m, n эта прогрессия содержит нуль и под каким номером?

М2◇4°. Какие из перечисленных ниже свойств набора чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ необходимы, а какие — достаточны для того, чтобы этот набор был арифметической прогрессией?
а) любой элемент (кроме крайних), есть среднее арифметическое двух соседних;
б) $2\,a_i = a_{i-2} + a_{i+2}$ при всех $2 \leqslant i \leqslant n-2$; **в)** $a_i = 2\,a_{i-1} - a_{i-2}$ при всех $2 \leqslant i \leqslant n$;
г) сумма $a_i + a_{n-i}$ одна и та же для всех $0 \leqslant i \leqslant n$.

М2◇5°. Выразите сумму всех элементов конечной арифметической прогрессии[1]
а) через два крайних члена и количество слагаемых;
б) через начальный член, количество слагаемых и приращение.

М2◇6. Найдите сумму всех трёхзначных чисел с остатком 7 от деления на 43.

М2◇7. По строкам и столбцам прямоугольной таблицы размера $m \times n$ стоят арифметические прогрессии. Найдите сумму всех чисел в таблице, если сумма четырёх угловых равна S.

М2◇8. Как связаны арифметические прогрессии с m-угольными числами Диофанта? Чему равно n-тое m-угольное число?

М2◇9*. Можно ли разбить множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ в объединение (возможно, бесконечного) набора попарно непересекающихся бесконечных арифметических прогрессий с разностями $d_1, d_2, \ldots$, удовлетворяющими неравенству $1/d_1 + 1/d_2 + \cdots < 0,9$?

Суммирование разностей. Часто сумму $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ удаётся вычислить, представив каждое слагаемое в виде разности $b_i = c_{i+1} - c_i$ чисел некоего другого набора $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$. Более общим образом эта идея выглядит так: заменим каждое b_i подходящей суммой $b_i = \pm c_{i1} \pm c_{i2} \pm \cdots \pm c_{im_i}$ так, чтобы при подстановке в исходную сумму $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ бóльшая часть c_{ij} либо сокращалась, либо легко складывалась.

М2◇10. Вычислите суммы: **а)** $\dfrac{1}{1\cdot2} + \dfrac{1}{2\cdot3} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)}$; **б)** $1\cdot2 + 2\cdot3 + \cdots + n\,(n+1)$;
в) $\dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}a_n}$ ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ – арифметическая прогрессия с разностью d);
г) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3} + \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}$; **д)** $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \cdots + n\,(n-1)\,(n+2)$;
е) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$.

М2◇11. Выразите $(n+1)^k$ и разность $(n+1)^k - n^k$ в виде многочленов от n при $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

М2◇12. Пользуясь предыдущей задачей, вычислите сумму k-тых степеней первых n натуральных чисел для $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

---

[1] на клетчатой бумаге прогрессию, скажем, $2, 5, 8, 11$, удобно рисовать в виде