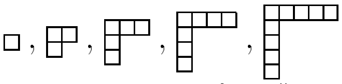
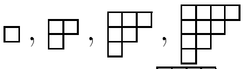
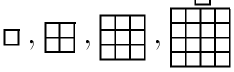
Геометрическое суммирование

... Достопочтеннейший Дионисий, зная что ты ревностно хочешь научиться решению задач, касающихся чисел, я попытался изложить природу их и могущество, начиная с тех оснований, на которых покоится эта наука ... Все числа, как ты знаешь, состоят из некоторого количества единиц; ясно, что они продолжаются, увеличиваясь, до бесконечности. Так вот, среди них находятся: квадраты, получающиеся от умножения некоторого числа самого на себя — число же это называется стороной квадрата; затем кубы ... Каждое из возрастающих от единицы чисел, начиная с трёх, является первым после единицы многоугольником и имеет столько углов, сколько в нём содержится единиц, стороной же его будет 2. Так, 3 будет треугольником, 4 — четырёхугольником, 5 — пятиугольником и т. д.

из книги Диофанта Александрийскго «Арифметика»
и его же учения «О многоугольных числах»

М1◇1. Рассмотрим последовательность  , ... (древние греки называли Г-образные фигурки *гномонами*). Сколько клеток в k-той фигурке и чему равна суммарная площадь первых k гномонов?

М1◇2. Чему равно k-е нечётное число и сумма первых k нечётных чисел? Чему равно k-е чётное число и сумма первых k чётных чисел? Вычислите суммы 300 нечётных чисел, начиная с 57 и 200 чётных чисел, начиная с 444.

М1◇3. Треугольные числа Диофанта:  — это 1, 3, 6, 10, ... Четырёхугольные числа:  — это квадраты. Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат. Чему равно $T_n + T_n$? Выразите T_n через n.

М1◇4. Найдите сумму первой тысячи натуральных чисел.

М1◇5° **(пифагорова таблица умножения).** Докажите тождество $mk = km$ (т. е. что $\underbrace{k+k+\cdots+k}_{m} = \underbrace{m+m+\cdots+m}_{k}$). Каковы размеры и площадь таблицы на рис. 1.1?

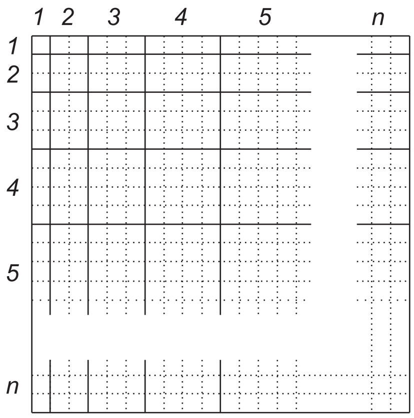


Рис. 1.1. Пифагорова таблица умножения чисел от 1 до n.

М1◇6. Сколько клеток в k-том, считая от левого верхнего угла пифагоровой таблицы, «толстом» гномоне, вершина которого представляет k^2, а стороны суть произведения k на 1, 2, ... , $(k-1)$?

М1◇7. Сформулируйте и докажите теорему, описывающую явление: $3+5=2^3$, $7+9+11=3^3$, $13+15+17+19=4^3$, ...

М1◇8. Вычислите суммы:

а) $1^3+2^3+\cdots+n^3$; **б**) $T_1+2T_2+\cdots+nT_n$;
в*) $1^2+2^2+\cdots+n^2$; **г***) $T_1+T_2+\cdots+T_n$.

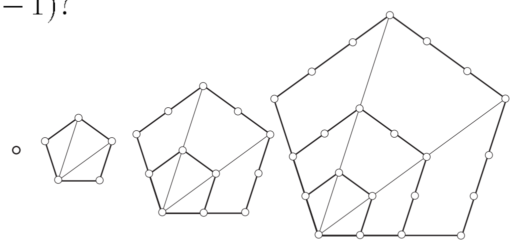


Рис. 1.2. Пятиугольные числа.

М1◇9*. Вычислите суммы квадратов первых n чётных чисел и первых n нечётных чисел.

М1◇10. Пятиугольные числа Диофанта: $P_1=1$, $P_2=5$, $P_3=12$, $P_4=22$, ... изображены на рис. 1.2. Чему равно $P_k - P_{k-1}$? Выразите P_n через n.