Сходимость рядов[1]

Напоминания о сходящихся рядах. Суммой числового ряда $\sum c_\nu$ (вещественного или комплексного) называется предел его *частичных* сумм $\lim\limits_{n\to\infty}(c_0+c_1+\dots+c_n)$. Если он существует, ряд называется *сходящимся*, если нет — *расходящимся*. Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если все конечные суммы вида $|c_i|+|c_{i+1}|+\dots+|c_{i+m}|$ ограничены сверху. Сходящийся ряд, который не является абсолютно сходящимся, называется *условно сходящимся*.

М26◇1. Приведите пример какого-нибудь условно сходящегося ряда. Можно ли перемешать его слагаемые так, чтобы ряд перестал сходится?

М26◇2*. Можно ли перемешать слагаемые произвольного условно сходящегося рада так, чтобы он стал **а)** расходиться **б)** сходиться к любому наперёд заданному числу (в т. ч. $\pm\infty$)?

М26◇3. Докажите, что всякий абсолютно сходящийся ряд сходится, причём его сумма не меняется при перемешивании слагаемых.

М26◇4 (критерий Коши). Докажите, что для абсолютной сходимости ряда $\sum c_\nu$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,n\in\mathbb{N}\,:\,|c_k|+|c_{k+1}|+\dots+|c_{k+m}|<\varepsilon\ \forall\,k>n$ и $\forall\,m\in\mathbb{N}$.

М26◇5. Докажите, что ряд $\sum a_\nu b_\mu$, составленный из всевозможных попарных произведений (всё равно в каком порядке) членов двух абсолютно сходящихся рядов $\sum a_\nu$ и $\sum b_\mu$ абсолютно сходится к произведению сумм рядов-сомножителей.

М26◇6 (признаки Абеля и Дирихле). Сходится ли ряд $\sum a_n b_n$, если известно, что:
а) $\sum|a_n|$ сходится, а b_n ограничены? **б)** $\sum a_n$ сходится, а b_n ограничены и монотонны?
в) суммы $a_1+\dots+a_n$ ограничены, а b_n монотонно стремятся к нулю при $n\to\infty$?

М26◇7. Пусть ряд $f(x)=\sum a_k x^k$ сходится при $x=x_0$. Верно ли, что он абсолютно сходится при всех x с $|x|<|x_0|$?

М26◇8 (признак Коши). Докажите, что ряд $\sum c_\nu$ абсолютно сходится, если существует вещественное положительное $q<1$, такое что $\sqrt[\nu]{|c_\nu|}\leqslant q$ при всех $\nu\gg 0$.

М26◇9 (признак Даламбера). Докажите, что ряд $\sum c_\nu$ абсолютно сходится, если существует вещественное положительное $q<1$, такое что $|c_{\nu+1}/c_\nu|\leqslant q$ при всех $\nu\gg 0$.

М26◇10. Сходятся ли: **а)** $\sum\limits_{n\geqslant 1}\binom{2n}{n}^{-1}$ **б)** $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ **в)** $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ **г)** $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Радиус сходимости степенного ряда. Число $\varrho\in\mathbb{R}$, обратное к твг множества предельных точек последовательности $\sqrt[n]{|a_n|}$ называется *радиусом сходимости* степенного ряда $\sum a_n x^n$. Если эта твг равна нулю, положим $\varrho=+\infty$. Если последовательность $\sqrt[n]{|a_n|}$ не ограничена сверху, положим $\varrho=0$.

М26◇11. Докажите, что всякий (вещественный или комплексный) степенной ряд $\sum a_n x^n$ абсолютно сходится при любом x с $|x|<\varrho$ и расходится при любом x с $|x|>\varrho$.

М26◇12. Пусть ряд $f(x)=\sum a_n x^n$ имеет ненулевой радиус сходимости ϱ. Зададимся произвольным числом $r\in\mathbb{R}$, таким что $0<r<\varrho$. Верно ли, что $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,m\in\mathbb{N}:\forall\,n>m$ неравенство $|f(x)-a_0-a_1x-\dots-a_nx^n|<\varepsilon$ выполняется сразу для всех[2] x с $|x|<r$.

М26◇13. Сравните радиусы сходимости степенных рядов $f=\sum\limits_{n\geqslant 0}a_n x^n$ и $f'\overset{\text{def}}{=}\sum\limits_{n\geqslant 1}na_n x^{n-1}$.

М26◇14*. Докажите, что сумма степенного ряда с ненулевым радиусом сходимости ϱ является бесконечно дифференцируемой функцией[3] в области $|x|<\varrho$.

М26◇15*. Пусть числа r и R обратны, соответственно, твг и тнг предельных точек последовательности $|a_{n+1}/a_n|$. Сходится ли степенной ряд $\sum a_n x^n$ при $|x|<r$ и $|x|>R$? Какие неравенства связывают r, R и радиус сходимости? Бывают ли они строгими?

---

[1] задачи этого листка можно решать в $\mathbb{R}$, в $\mathbb{C}$, или и там и там

[2] это явление называется *равномерной* (по $x:|x|<r$) сходимостью

[3] подсказка: *равномерно* по x одновременно приблизьте f и f' их частичными суммами, а производную от f (понимаемую как предел отношения приращений) — отношением приращений частичной суммы

Исчисление формальных рядов

Обозначение: через $U \subset \mathbb{F}[[t]]$ и $N \subset \mathbb{F}[[t]]$ мы обозначаем множества всех рядов, соответственно, с единичным свободным членом и с нулевым свободным членом. Отметим, что U замкнуто относительно операций умножения и деления, а N — относительно сложения и вычитания. Кроме того, по зад. M$25\frac{1}{2}\diamond 5$ для любого $f \in U$ корректно определён ряд $\ln f \in N$.

M$26\frac{1}{2}\diamond$1 (логарифмическая производная). Равносильны ли друг другу такие равенства на ряды $f, g \in U$: **а)** $f = g$ **б)** $f' = g'$ **в)** $f'/f = g'/g$ **г)** $(\ln f)' = (\ln g)'$ **д)** $\ln f = \ln g$. Задаёт ли отображение $f \longmapsto \Big(\ln(f)\Big)'$ биекцию между U и $\mathbb{F}[[t]]$?

M$26\frac{1}{2}\diamond$2 (экспонента). Покажите, что существует ровно один ряд $\exp(t) \in U$ с $\exp' = \exp$, вычислите все его коэффициенты, убедитесь, что $\exp(h(t))$ определена для любого ряда $h(t) \in N$ и вычислите $\exp(\ln(1+t))$.

M$26\frac{1}{2}\diamond$3. Докажите, что экспоненцирование и логарифмирование $N \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} U$ являются взаимно обратными биекциями, переводящие операцию сложения рядов в N в операцию умножения рядов в U, т. е. $\exp(h_1 + h_2) = \exp(h_1)\exp(h_2)$ и $\ln(f_1 f_2) = \ln(f_1) + \ln(f_2)$ $\forall\ h_1, h_2 \in N$ и $\forall\ f_1, f_2 \in U$.

M$26\frac{1}{2}\diamond$4 (бином Ньютона). Для любого $\alpha \in \mathbb{F}$ ряд $(1+t)^\alpha \overset{\text{def}}{=} \exp\big(\alpha \ln(1+t)\big)$ называется *биномом* с показателем α. Вычислите явно все коэффициенты бинома и разверните в формальные степенные ряды $\sqrt[3]{1+2t}$ и $1/\sqrt{1-3t}$.

M$26\frac{1}{2}\diamond$5. Убедитесь, что ряд f^α определен для любых $f \in U$, $\alpha \in \mathbb{F}$ и лежит в U. Верно ли, что: **а)** $f^{\alpha_1} f^{\alpha_2} = f^{\alpha_1+\alpha_2}$ **б)** $(f^{\alpha_1})^{\alpha_2} = f^{\alpha_1\alpha_2}$ **в)** ряд f^{-1} обратен ряду f?

M$26\frac{1}{2}\diamond$6. Выразите $(f^\alpha)'$ через α, f и f'.

Метод производящих функций. Для изучения последовательности $(a_n) \subset \mathbb{F}$ часто бывает удобно сопоставить ей *производящую функцию* $A(t) = \sum a_n t^n \in \mathbb{F}[[t]]$ и переформулировать свойства этой последовательности в виде соотношений на $A(t)$ в $\mathbb{F}[[t]]$ — например, алгебраических, дифференциальных, и т. п. уравнений на $A(t)$. Эти соотношения можно исследовать при помощи исчисления формальных степенных рядов (например, явно найти $A(t)$ из соответствующего уравнения).

M$26\frac{1}{2}\diamond$7* (числа Каталана). На практике при вычислении суммы $a_1 \overbrace{+ a_2 + \cdots +}^{n \text{ плюсов}} a_{n+1}$ в ней расставляются скобки, фиксирующие конкретный порядок выполнения сложений (по одному в каждый момент времени). Количество всевозможных таких расстановок называется *n-тым числом Каталана c_n*. По определению, $c_0 = 1$. Напишите рекуррентную формулу, выражающую c_n через $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, проинтерпретируйте её как квадратное уравнение на ряд $c(t) = \sum c_\nu t^\nu$, решите его в $\mathbb{Q}[[t]]$ и получите явное выражение чисел Каталана через подходящие числа сочетаний. Кстати, всегда ли C_{2n}^n делится на $(n+1)$?

M$26\frac{1}{2}\diamond$8*. Сколькими способами можно разрезать выпуклый n-угольник на треугольники по нигде кроме вершин не пересекающимся диагоналям?

M$26\frac{1}{2}\diamond$9. Пусть последовательность $(y_n) \subset \mathbb{C}$ удовлетворяет рекуррентному уравнению k-того порядка[1] $y_n = a_1 y_{n-1} + \cdots + a_k y_{n-k}$ и при $0 \leqslant \nu \leqslant (k-1)$ имеет заданные начальные значения $y_\nu = c_\nu \in \mathbb{C}$. Положим $Y(t) = \sum\limits_{\nu \geqslant 0} y_\nu t^\nu \in \mathbb{C}[[t]]$, $A(t) = 1 - a_1 t - \cdots - a_k t^{n-k} \in \mathbb{C}[t]$, $B(t) = Y(t) \cdot A(t)$. Выразите коэффициенты ряда $B(t)$ через a_ν и c_ν. Является ли он многочленом?

M$26\frac{1}{2}\diamond$10. Пользуясь предыдущей задачей, найдите $Y(t)$ и «формулу n-того члена» для последовательностей: **а)** $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$ с $y_0 = 0$, $y_1 = 1$; **б)** $y_n = 4\,(y_{n-1} - y_{n-2})$ с $y_0 = 3$, $y_1 = 1$.

---

[1] $k \in \mathbb{N}$ и $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ даны и фиксированы, причём $a_k \neq 0$

Действие $\mathbb{Q}[[\frac{d}{dx}]]$ на $\mathbb{Q}[x]$.

Подстановка $t = \frac{d}{dx}$ в формальный степенной ряд. Для любого ряда $F(t) = \sum\limits_{k\geqslant 0} a_k t^k \in \mathbb{Q}[[t]]$ определим отображение $\mathbb{Q}[x] \xrightarrow{\widetilde{F}} \mathbb{Q}[x]$, которое получается подстановкой в F вместо t оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$. Иначе говоря, $\widetilde{F} = F\left(\frac{d}{dx}\right)$ переводит каждый многочлен $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ в многочлен

$$\widetilde{F}g = F\left(\frac{d}{dx}\right)g \overset{\text{def}}{=} \sum_{k\geqslant 0} a_k \frac{d^k g}{dx^k} = \sum_{k\geqslant 0} a_k g^{(k)} \ ,$$

где $\frac{d^k g}{dx^k} = g^{(k)}$ — это k-я производная от g и $g^{(0)} \overset{\text{def}}{=} g$. Поскольку для каждого многочлена $g^{(n)} = 0$ при всех $n \gg 0$, сумма справа конечна и $\widetilde{F}g$ тоже является многочленом.

М$26\frac{2}{3}\diamond$1 (формула Тейлора). Как действуют на $\mathbb{Q}[x]$ операторы $\exp(\frac{d}{dx})$ и $\exp(-\frac{d}{dx})$?

М$26\frac{2}{3}\diamond$2 (разностные операторы). Покажите, что отображения $f(x) \overset{\nabla}{\longmapsto} f(x) - f(x-1)$ и $f(x) \overset{\Delta}{\longmapsto} f(x+1) - f(x)$ получаются из некоторых рядов и найдите эти ряды явно.

М$26\frac{2}{3}\diamond$3. Проверьте, что отображение $\mathbb{Q}[x] \xrightarrow{\widetilde{F}} \mathbb{Q}[x]$ *линейно*, т. е. $\forall\, f, g \in \mathbb{Q}[x]$ и $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ выполняется соотношение $\widetilde{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \widetilde{F} g + \mu \widetilde{F} f$, а также что $\lambda \widetilde{F + \mu G} = \lambda \widetilde{F} + \mu \widetilde{G}$.

М$26\frac{2}{3}\diamond$4. Убедитесь, что действие $\widetilde{F}$ однозначно определяется заданием последовательности *многочленов Аппеля*: $F_n(x) \overset{\text{def}}{=} \widetilde{F} x^n$. А именно, выразите коэффициенты $F_n(x)$ через коэффициеты $F(t)$ и, наоборот, восстановите F по F_n.

М$26\frac{2}{3}\diamond$5. Пусть $F(t)G(t) = 1$ в $\mathbb{Q}[[t]]$. Что можно сказать про отображения $\widetilde{F}$ и $\widetilde{G}$?

М$26\frac{2}{3}\diamond$6. Постройте последовательность многочленов $c_n(x)$, в которой $c_0(x) = 1$, и при $n \geqslant 1$ все $c_n(x)$ не имеют свободного члена и удовлетворяют соотношению $\nabla c_n = c_{n-1}$.

М$26\frac{2}{3}\diamond$7 (суммирование степеней). Покажите, что при фиксированном целом неотрицательном m сумма $s_m(n) = 1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m$ является многочленом от n, вычислите $\Delta s_m(x)$ и найдите в $\mathbb{Q}[[t]]$ ряд, для которого $s'_m(x)$ является n-тым многочленом Аппеля (см. зад. М$26\frac{2}{3}\diamond$4).

Ряд Тодда и многочлены Бернулли. Ряд $B(t) = \sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{b_k}{k!}\, t^k \overset{\text{def}}{=} \frac{t}{e^t - 1}$ называется *рядом Тодда*. Входящие в его коэффициенты числа b_k называются *числами Бернулли*, а его многочлены Аппеля (см. зад. М$26\frac{2}{3}\diamond$4) $B_n(x) = \widetilde{B} x^n$ называются *многочленами Бернулли*.

М$26\frac{2}{3}\diamond$8. Выразите **а)** b_n через $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ **б)** B_n через $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$

М$26\frac{2}{3}\diamond$9. Выразите коэффициенты многочлена $s_m(x)$ из зад. М$26\frac{2}{3}\diamond$7 через числа Бернулли.

М$26\frac{2}{3}\diamond$10. Найдите «нечётную составляющую» $B(t) - B(-t)$ и все числа b_{2k+1}.

М$26\frac{2}{3}\diamond$11*. Вычислите первые 11 чисел и многочленов Бернулли и сумму 10-х степеней первых 1000 натуральных чисел[1].

М$26\frac{2}{3}\diamond$12 (целозначные многочлены). Многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами называется *целозначным*, если $f(z) \in \mathbb{Z} \quad \forall\, z \in \mathbb{Z}$. Бывают ли целозначные многочлены с нецелыми коэффициентами? Укажите какой-нибудь набор из $(n+1)$ целозначных многочленов $f_0, f_1, \ldots, f_n$, такой что любой целозначный многочлен f степени $\leqslant n$ единственным образом записывается в виде $f = m_0 f_0 + m_1 f_1 + \cdots + m_n f_n$ с $m_i \in \mathbb{Z}$. Существуют ли такие наборы с $\deg f_i = i\ \forall i$ и с $\deg f_i = n\ \forall i$?

[1]напомню, что у Якоба Бернулли, по его собственному признанию, на это ушло «меньше половины четверти часа»

Экспонента и логарифм[1]

M27◇1 (экспоненты). Пусть формальный степенной ряд $f = \sum\limits_{k\geqslant 0} a_k x^k$ удовлетворяет соотношению $f' = f$. Выразите все коэффициенты a_k через a_0 и докажите, что полученный ряд абсолютно сходится при всех x.

определение Ряд $e^x \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu\geqslant 0} \frac{x^\nu}{\nu!}$, возникающий в предыдущей задаче при $a_0 = 1$, называется *экспонентой*.

M27◇2. Докажите $\forall\, a, b$ основное экспоненциальное тождество[2]: $e^{a+b} = e^a e^b$.

M27◇3. Для любых положительных ε, $\varrho \in \mathbb{R}$ подберите $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\forall\, k \geqslant n$ неравенство $|1 + x + x^2/2 + \cdots + x^k/k! - e^x| < \varepsilon$ было выполнено *сразу для всех* x с $|x| \leqslant \varrho$.

M27◇4. Вычислите **а)** $\lim\limits_{x\to 0} e^x$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ **в)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$

M27◇5. Докажите, что функция e^x всюду бесконечно дифференцируема и вычислите $(e^x)'$.

M27◇6. Опишите все дифференцируемые функции на интервале (a, b), удовлетворяющие дифференциальному уравнению[3] $f'(x) = f(x)$ при всех $x \in (a, b)$.

Обозначение. Через $\mathbb{R}^{>0} \subset \mathbb{R}$ мы обозначаем множество всех *положительных* вещественных чисел. Отметим, что оно замкнуто относительно операций умножения и деления.

M27◇7. Докажите, что функция $y = e^x$ является монотонно возрастающей биекцией между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^{>0}$, и постройте её примерный график.

M27◇8*. Любая ли непостоянная непрерывная функция $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{>0}$, удовлетворяющая тождеству $f(a+b) = f(a)f(b)\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$, переводит 0 в 1, всюду дифференцируема и удовлетворяет дифференциальному уравнению $f'(x) = f(x)$? Опишите все такие функции.

M27◇9 (логарифм). Функция $y = \ln x$, обратная к функции $y = e^x$, называется (*натуральным*) *логарифмом*[4]. Докажите, что функция $\mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{x\mapsto \ln x} \mathbb{R}$ является монотонно возрастающей всюду дифференцируемой биекцией и удовлетворяет основному логарифмическому тождеству $\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}^{>0}$. Постройте её примерный график и вычислите $\ln'(x)$.

M27◇10 (логарифмическая производная). Выразите $\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)'$ через f и f' и вычислите производную произведения $(1 + 3\,x^2)^3 \cdot (1 - 5\,x^4)^2 \cdot (21 + 7\,x^5)$.

M27◇11*. Любая ли непостоянная непрерывная функция $\mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, удовлетворяющая тождеству $f(ab) = f(a) + f(b)\ \forall\ a, b \in \mathbb{R}^{>0}$, переводит 1 в 0, взаимно однозначна и всюду дифференцируема? Опишите все такие функции.

M27◇12*. Вычислите $e^{\pi i}$ и $e^{2\pi i}$. Покажите, что функция $\mathbb{C} \xrightarrow{z\mapsto e^z} \mathbb{C}$ является периодической, найдите её период, множество её значений и укажите в $\mathbb{C}$ какую-нибудь область, взаимно однозначно отображаемую на множество значений.

M27◇13* (комплексный логарифм). Пусть $Ln\,(z) \overset{\text{def}}{=} \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,(z)$. Найдите все значения[5]:
а) $Ln\,(-1)$ **б)** $Ln\,(ie)$ **в)** $e^{Ln\,(z)}$, где $z \neq 0$ **г)** $Ln(e^z)$

M27◇14. Найдите радиус сходимости ряда $\ln(1+x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ и докажите, что при вещественных x с $|x| < \varrho$ правая часть абсолютно сходится к $\ln(1+x)$.

M27◇15*. Что происходит при $x = \pm\varrho$?

---

[1] задачи 1 – 5 можно решать в $\mathbb{R}$, в $\mathbb{C}$, или и там и там

[2] подсказка: проверьте сначала, что это тождество выполнено для формальных степенных рядов от a, b, потом докажите, что все ряды абсолютно сходятся и примените зад. M26◇5

[3] подсказка: пусть $f' = f$; найдите $(fe^{-x})'$.

[4] иначе говоря, $\ln x$ — это степень, в которую надо возвести число e, чтобы получить x

[5] напомним, что *ориентированный угол* $\mathrm{Arg}\,(z)$ — это *многозначная* функция

Степенные, показательные и логарифмические функции

Определения и обозначения. Для любых $a \in \mathbb{R}^{>0}$ и $b \in \mathbb{R}$ через a^b обозначается действительное число $e^{b\ln a}$. При фиксированном $b \in \mathbb{R}$ функция $x \mapsto x^b$, заданная на подмножестве $\mathbb{R}^{>0} \subset \mathbb{R}$, называется *степенной функцией с показателем* b. При фиксированном $a \in \mathbb{R}^{>0}$ функция $x \mapsto a^x$, заданная на всём $\mathbb{R}$, называется *показательной функцией с основанием* a.

М28◇1. Верно ли, что **а**) $a^b a^c = a^{b+c}\ \forall\, a \in \mathbb{R}^{>0}, \forall\, b, c \in \mathbb{R}$ **б**) $b^a c^a = (bc)^a\ \forall\, a \in \mathbb{R}$ и $\forall\, b, c \in \mathbb{R}^{>0}$ **в**) $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}$ и $\forall\, a \in \mathbb{R}^{>0}$ **г**) $a^{-b} = (1/a)^b = 1/(a^b)\ \forall\, a \in \mathbb{R}^{>0}, \forall\, b \in \mathbb{R}$. **д**) $\left(a^b\right)^c = a^{bc}\ \forall\, a \in \mathbb{R}^{>0}, \forall\, b, c \in \mathbb{R}$

М28◇2. Каким неравенством связаны при $x \in \mathbb{R}^{>0}$ и $\alpha \in (\,0\,,\,1\,)$ функции: **а**) $\ln(1+\alpha x)$ и $\alpha\ln(1+x)$ **б**) $1+\alpha x$ и $(1+x)^\alpha$

М28◇3. Вычислите производную степенной функции $y = x^b$ и постройте её график при разных $b \in \mathbb{R}$. При каких b степенная функция $\mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{x \mapsto x^b} \mathbb{R}^{>0}$: **а**) взаимно однозначна **б**) строго монотонна **в**) выпукла вверх **г**) выпукла вниз **д**) возрастает **е**) убывает

М28◇4. Вычислите производную показательной функции $y = a^x$ и постройте её график при разных $a \in \mathbb{R}^{>0}$. При каких a показательная функция $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto a^x} \mathbb{R}^{>0}$: **а**) строго монотонна **б**) взаимно однозначна **в**) выпукла вверх **г**) выпукла вниз **д**) возрастает **е**) убывает

М28◇5 (логарифм по произвольному основанию). Докажите, что $\forall\, x \in \mathbb{R}^{>0}$ и любого положительного $c \neq 1$ существует единственное число $y \in \mathbb{R}$, такое что $c^y = x$ (это число называется *логарифмом* x *по основанию* c и обозначается $\log_c x$). Выразите $\log_c x$ через $\ln c$ и $\ln x$, вычислите производную $\log_c' x$ и постройте график функции $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto \log_c x} \mathbb{R}^{>0}$ при разных $c \in \mathbb{R}^{>0}$. При каких c она **а**) строго монотонна **б**) взаимно однозначна **в**) выпукла вверх **г**) выпукла вниз **д**) возрастает **е**) убывает

М28◇6 (формулы замены основания). При каких a, b, c выполняются равенства $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ и $a^b = c^{b\log_c a}$? Справедливы ли для функций $y = \log_a x$ и $y = a^x$ с произвольным $a \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$ тождества из зад. М27◇2 и зад. М27◇9?

М28◇7. Найдите производные от функций: **а**) $e^{\cos^2 x}$ **б**) $x\,e^{x\ln x}$ **в**) $\log_x\left(x^{\ln x}/e^x\right)$ **г**) x^x **д**) x^{x^x}

М28◇8. Вычислите: **а**) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(e^x/x^m)\ \ \forall\, m \in \mathbb{N}$ **б**) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln(x)\,/\,\sqrt[m]{x}\right)\ \forall\, m \in \mathbb{N}$ **в**) $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)$ **г**) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$ **д**) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$ **е**) $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$ **ж**) $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^x-1}$ **з**) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1/x))^x$

М28◇9. Постройте (с полным исследованием) графики функций: **а**) $x\ln x$ **б**) $e^{-x}\cdot(3x-1)$ **в**) $\dfrac{e^x}{(1+x)}$ **г**) $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ **д**) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ **е**) $\sqrt{1-e^{-x^2}}$ **ж**) $x^{1/x}$ **з**) $(1+x)^{1/x}$

М28◇10. Какую кривую опишет на плоскости точка, координаты которой меняются по закону:

а) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{(e^t+e^{-t})}{2} \\ y(t) = \dfrac{(e^t-e^{-t})}{2} \end{cases}$, **б***) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{(e^{it}+e^{-it})}{2} \\ y(t) = \dfrac{(e^{it}-e^{-it})}{2i} \end{cases}$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$?

Последовательности функций

Равномерная и поточечная сходимость. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x)$, заданных на одном и том же множестве $X \subset \mathbb{R}$. Функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется *поточечным* пределом последовательности f_n, если $\forall x \in X \quad f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (обозначение: $f_n \to f$ при $n \to \infty$). Иначе говоря, f_n поточечно сходятся к f, если $\forall\, \varepsilon > 0$ и $\forall\, x \in X\ \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall\, n > N$. Это N, вообще говоря, зависит как от погрешности ε, так и от точки x. Если зависимость от точки x отсутствует, то сходимость называется *равномерной* (обозначение: $f_n \rightrightarrows f$ при $n \to \infty$). Иначе говоря, f_n равномерно сходятся к f, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall\, n > N$ сразу для всех $x \in X$.

М29◇1. Постройте поточечно, но не равномерно сходящуюся к $f(x) \equiv 0$ последовательность
а) каких-нибудь функций на $[\,0\,,\,1\,]$ **б)** функций, непрерывных на $(\,0\,,\,1\,)$.

М29◇2. Сходится ли (и если да, то как и к чему) на $[\,0\,,\,1\,]$ последовательности функций:
а) $f_n(x) = x^{1/n}$ **б)** $f_n(x) = x^n$ **в)** $f_n(x) = (1 + x^n)/(1 + x^{2n})$ **г)** $g_n(x) = (1 + x^{2n-1})/(1 + x^{2n})$

М29◇3. Пусть последовательности f_n и g_n равномерно сходятся на всём $\mathbb{R}$. Будет ли равномерно сходиться **а)** $f_n + g_n$? **б)** $f_n \cdot g_n$? **в)** $1/f_n$, если $\forall\, x, n\ f_n(x) \neq 0$?

М29◇4. Обязан ли быть поточечный предел последовательности
а) многочленов степени $\leqslant d$ многочленом степени $\leqslant d$?
б) непрерывных на $[a, b]$ функций непрерывной на $[a, b]$ функцией?

М29◇5 (лемма о равномерной непрерывности). Докажите, что если функция f непрерывна на $[a, b]$, то $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ сразу для всех пар x_1, x_2 с $|x_1 - x_2| < \delta$.

М29◇6. Пусть последовательность функций f_n поточечно сходится к функции f на $[a, b]$. Обязана ли эта сходимость быть равномерной, если
а) все f_n и f непрерывны и $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$ всюду на $[a, b]$
б) то же, но без условия, что f непрерывна
в) все f_n непрерывны и монотонно неубывают всюду на $[a, b]$.
г) $\forall x\ f_n(x)$ монотонно неубывают по n и $\forall n\ f_n(x)$ монотонно неубывает по x

М29◇7. Докажите, что равномерный предел непрерывных на отрезке функций тоже непрерывен на этом отрезке.

М29◇8 (Ступенчатые функции). Функция $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется *ступенчатой*, если существует разбиение $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ отрезка $[a, b]$, такое что f постоянна на каждом из интервалов (a_{i-1}, a_i). Верно ли, что всякая **а)** неубывающая **б)** непрерывная функция на $[a, b]$ является равномерным пределом подходящей последовательности ступенчатых функций?

М29◇9. Может ли равномерный предел последовательности ступенчатых функций
а) быть неограниченной функцией **б)** иметь бесконечно много разрывов

М29◇10* (лейбницева пила – 2). Разобьём $[\,0\,,\,1\,]$ на 2^n равных частей и обозначим через f_n неотрицательную непрерывную на $[\,0\,,\,1\,]$ функцию, график которой над каждым отрезочком разбиения образован боковыми сторонами правильного треугольника с этим отрезочком в качестве основания. Существует ли **а)** поточечный **б)** равномерный предел $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x))$.

М29◇11*. Будет ли функция $s(x)$ из предыдущей задачи
а) непрерывна **б)** диффернцируема хоть где-нибудь?

М29◇12*. Существует ли равномерно сходящаяся последовательность всюду дифференцируемых на $[\,0\,,\,1\,]$ функций, предел которой на $[\,0\,,\,1\,]$ не дифференцируем
а) где-нибудь **б)** нигде?

Метрические пространства

Метрическое пространство — это множество $\mathscr{M}$, на котором для каждой пары элементов (p, q) задано неотрицательное *расстояние* $\varrho(p,q) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, обращающееся в нуль тогда и только тогда, когда $p = q$, и удовлетворяющее *неравенству треугольника*: $\varrho(p,q) + \varrho(q,r) \geqslant \varrho(p,r)\ \forall\, p,q,r \in \mathscr{M}$.

М$29\frac{1}{2}$◇1°. Какие из перечисленных ниже множеств с «расстоянием» являются метрическими пространствами: **а)** непрерывные функции на отрезке $[a,b]$ с $\varrho(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ **б)** $\mathbb{Q}$ с $\varrho(x,y) = |x-y|$ **в*)** отрезки числовой прямой с $\varrho\Big([a,b]\,,\,[c,d]\Big) = |a-c| + |b-d|$ **г)** $\mathbb{R}^n$ с $\varrho\Big((x_1,\,\dots\,,x_n)\,,\,(y_1,\,\dots\,,y_n)\Big) = \sqrt{\sum(x_i-y_i)^2}$ **д)** то же, но $\varrho = \max_i |x_i - y_i|$ **е)** ограниченные последовательности $(a_n) \subset \mathbb{R}$ с $\varrho\Big((a_n)\,,\,(b_n)\Big) = \sup_i |a_i - b_i|$ **ж*)** $\Big\{(a_n) \subset \mathbb{R} \mid \text{ряд } \sum a_i^2 \text{ сходится}\Big\}$ с $\varrho\Big((a_n)\,,\,(b_n)\Big) = \sqrt{\sum(a_n-b_n)^2}$

Шары и топология. В метрическом пространстве $\mathscr{M}$ для любого вещественного $\varepsilon > 0$ подмножество $D_\varepsilon(p) = \{x \in \mathscr{M} \mid \varrho(p,x) < \varepsilon\}$ называютмя *открытым*, а $\overline{D}_\varepsilon(p) = \{x \in \mathscr{M} \mid \varrho(p,x) \leqslant \varepsilon\}$ — *замкнутым шаром* радиуса ε с центром p (обязательно продумайте, как устроены шары в пространствах зад. М$29\frac{1}{2}$◇1). Открытый шар $D_\varepsilon(p)$ также называют *ε-окрестностью* точки $p \in \mathscr{M}$. Предельные, внутренние и изолированные точки подмножеств $X \subset \mathscr{M}$, открытые и замкнутые множества, пределы последовательностей $(x_n) \subset \mathscr{M}$, непрерывные функции $\mathscr{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ определяются в произвольном метрическом пространстве $\mathscr{M}$ дословно так же, как в $\mathscr{M} = \mathbb{R}$. Например, последовательность элементов $(x_n) \subset \mathscr{M}$ называется *последовательностью Коши*, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n \in \mathbb{N}\ :\ \varrho(x_m, x_k) < \varepsilon\ \ \forall\ m,k > n$. Метрическое пространство называется *полным*, если все последовательности Коши имеют в нём пределы.

М$29\frac{1}{2}$◇2°. Может ли иметь предел последовательность, не являющаяся последовательностью Коши? Может ли последовательность Коши иметь несколько пределов?

М$29\frac{1}{2}$◇3. Подмножество $M \subset \mathscr{M}$ называется *ограниченным*, если существуют $C \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathscr{M}$, такие что $\varrho(m,x) < C\ \forall x \in M$. Всякая ли ограниченная последовательность содержит подпоследовательность Коши: **а)** в $\mathbb{R}^n$? **б)** в произвольном метрическом пространстве?

М$29\frac{1}{2}$◇4. Какие из метрических пространств зад. М$29\frac{1}{2}$◇1 полны?

М$29\frac{1}{2}$◇5. Докажите, что пересечение конечных и объединение любых наборов открытых множеств открыто, и аналогичные свойства замкнутых множеств. Верно ли, что $U \subset \mathscr{M}$ открыто $\iff \mathscr{M} \setminus U$ замкнуто? Открыты ли открытые шары? Замкнуты ли замкнутые?

М$29\frac{1}{2}$◇6 (теорема о вложенных шарах). Равносильна ли полнота метрического пространства тому, что любая последовательность вложенных замкнутых шаров со стремящимися к нулю радиусами имеет в нём непустое пересечение? Всегда ли это пересечение — одна точка?

М$29\frac{1}{2}$◇7 (теорема о неподвижной точке). Отображение $\mathscr{M} \xrightarrow{F} \mathscr{M}$ называется *сжимающим*, если $\exists\ c \in \mathbb{R}\ :\ 0 < c < 1$ и $\varrho(F(x), F(y)) \leqslant c \cdot \varrho(x,y)\ \forall\ x,y \in \mathscr{M}$. Докажите, что если $\mathscr{M}$ полно, то любое сжимающее отображение F имеет единственную неподвижную точку, причём к ней сходится любая последовательность вида $x,\ F(x),\ F(F(x)),\ \dots$

М$29\frac{1}{2}$◇8. Пусть $X \subset \mathscr{M}$ удовлетворяет *условию Больцано – Вейерштрасса*: любая последовательность элементов X имеет в X предельную точку. Докажите, что

а) $\forall\ \varepsilon > 0\quad X$ покрывается конечным множеством шаров радиуса $\leqslant \varepsilon$

б) $\forall$ открытого покрытия X можно указать $\varepsilon > 0$ так, что всякий шар радиуса $\leqslant \varepsilon$ с центром в X целиком содержится хотя бы в одном из множеств покрытия

в) в любом покрытии X открытыми множествами содержится конечное подпокрытие

М$29\frac{1}{2}$◇9 (компактные подмножества $\mathbb{R}^n$). Докажите, что для подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$ (с любой метрикой из зад. М$29\frac{1}{2}$◇1) условие Больцано – Вейерштрасса, условие одновременной ограниченности и замкнутости, и условие наличия в любом открытом покрытии конечного подпокрытия попарно эквивалентны.

Интеграл по отрезку

Интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — это *учитываемая со знаком площадь, ограниченная графиком функции* $f(x)$ *над ориентированным отрезком* $[a,b]$, где «учёт со знаком» означает, что при $a<b$ та часть графика, где $f(x)>0$, учитывается с плюсом, а та часть, где $f(x)<0$ — с минусом, а «ориентированность отрезка» проявляется в том, что при проходе отрезка справа налево у всего интеграла следует сменить знак, т. е. $\int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} -\int\limits_b^a f(x)\,dx$. Придать точный смысл словам «площадь, ограниченная графиком» можно *не для всех* функций. В этом листке мы сделаем это лишь для некоторого класса *хороших* функций. Функцию $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ назовём *хорошей*, если существует последовательность ступенчатых функций $\varphi_n(x) \rightrightarrows f(x)$ (согласно зад. М29◇8 все монотонные и все непрерывные функции являются хорошими). Начнём с того, что интеграл от константы равен площади соответствующего прямоугольника, а от ступенчатой функции — сумме площадей прямоугольников: если $a=a_0<a_1<a_2<\dots<a_{n-1}<a_n=b$, и $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ принимает на (a_{i-1},a_i) постоянное значение $c_i\in\mathbb{R}$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})\cdot c_i$ (разумеется, надо проверять, что это не зависит от выбора точек a_i, таких что $f=\text{const}$ на (a_{i-1},a_i)). Для хорошей функции f, являющейся равномерным пределом последовательности ступенчатых функций φ_n, положим $\int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx$ (разумеется, надо проверять, что предел существует и зависит только от f, но не от выбора последовательности $\varphi_n \rightrightarrows f$). Наконец, при $a>b$ положим, по определению, $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$.

М30◇1°. Докажите следующие свойства интегралов от ступенчатых функций:

а) $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ не зависит от выбора разбиения, на котором f ступенчата

б) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx \quad \forall\, c\in[a,b]$

в) если $\forall\, x\in[a,b]\ \ |f(x)|\leqslant\lambda$, где $\lambda\in\mathbb{R}$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \lambda\,|b-a|$

г) если $f(x)\leqslant g(x)\ \ \forall\, x\in[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$

д) $\int\limits_a^b \Big(\lambda f(x)+\mu g(x)\Big)\,dx = \lambda\int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx\ \forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

М30◇2°. Пусть $f(x)$ — хорошая функция. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx$ существует для любой последовательности ступенчатых функций $\varphi_n(x)$, равномерно сходящейся к $f(x)$, и его значение не зависит от выбора последовательности $\varphi_n(x)$.

М30◇3°. Убедитесь, что любая ступенчатая функция хорошая, так что мы имеем два по-разному определённых интеграла от неё. Равны ли эти интегралы?

М30◇4. Какие свойства зад. М30◇1 остаются справедливыми для любых хороших функций?

М30◇5. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на отрезке $[a,b]$, и все f_n — хорошие функции. Верно ли, что

а) f тоже хорошая? **б)** если f хорошая, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx$?

М30◇6. Вычислите: **а)** $\int\limits_0^1 x\,dx$ **б)** $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ **в)** $\int\limits_0^1 x^n\,dx$ **г)** $\int\limits_0^1 e^x\,dx$.

Первообразные

Определение и обозначения. Функция $y = F(x)$ называется *первообразной* функции $y = f(x)$ на некотором интервале (отрезке), если $F'(x) = f(x)$ всюду на этом интервале (отрезке). Обозначение: $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$. Это обозначение не вполне корректно, поскольку $\forall\ C \in \mathbb{R}$ функция $F(x) + C$ также является первообразной для f, и точно также можно написать, что $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

М31◇1. Есть ли функции, у которых нет первообразных?

М31◇2. Пусть $F'(x) = f(x)$. Найдите все остальные первообразные от f.

М31◇3. Найдите все первообразные от: **а)** произвольного многочлена **б)** $\sin x$ **в)** $\cos x$ **г)** e^x **д)** x^α, $\alpha \neq 0, 1$ **е)** $\sqrt[3]{1+x}$ **ж)** $1/x$ **з)** $(1+x^2)^{-1}$ **и)** $(1-x^2)^{-1/2}$ **к)** $(1-x^2)^{-1}$ **л)** $\sin^{-2} x$ **м)** $\cos^{-2} x$ **н)** $(x+b)^{-1}$ **о)** $(ax+b)^{-1}$ **п)** $(ax+b)^\alpha$ (всюду $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$)

М31◇4. Пусть $F'(x) = f(x)$. Найдите все первообразные от $g(x) = f(ax+b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

М31◇5. В приводимых ниже равенствах предполагается, что все написанные в правых частях первообразные существуют, а $C \in \mathbb{R}$ — произвольная константа. Верные равенства докажите, неверные — опровергните: **а)** $\displaystyle\int \Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx + C = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

б) $\displaystyle\int f(x)g(x)\,dx + C = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$ **в)** $\displaystyle\int \lambda f(x)\,dx + C = \lambda \int f(x)\,dx\ \forall\,\lambda \in \mathbb{R}$

г) (интегрирование по частям) $\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx + C = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

М31◇6. Вычислите первообразные: **а)** $\displaystyle\int xe^x\,dx$ **б)** $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$ **в)** $\displaystyle\int \ln x\,dx$ **г)** $\displaystyle\int \cos\ln x\,dx$

д) $\displaystyle\int x\,\cos x\,dx$ **е)** $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$ **ж)** $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx$ **з)** $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ **и)** $\displaystyle\int e^{2x}\cos(3x)\,dx$

М31◇7 (замена переменного). Пусть функция $x = x(t)$ дифференцируема, а функция $y = f(x)$ является производной от функции $y = F(x)$. Верно ли, что $\displaystyle\int f(x(t))x'(t)\,dt = F(x(t)) + C$ с произвольным $C = \mathrm{const}$?

М31◇8. Вычислите первообразные[1]: **а)** $\displaystyle\int \frac{dx}{2-3x}$ **б)** $\displaystyle\int \frac{3x-1}{2-5x}\,dx$ **в)** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2-5}}$

г) $\displaystyle\int e^{3x-2}\,dx$ **д)** $\displaystyle\int 2^{5x-3}\,dx$ **е)** $\displaystyle\int \log_5(1-3x)\,dx$ **ж)** $\displaystyle\int \sin(5x+1)\,dx$

з) $\displaystyle\int \sin(2x)\cos(3x)\,dx$ **и)** $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$ **к)** $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,dx$ **л)** $\displaystyle\int \sin^2 x\,\cos^3 x\,dx$

м) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ **н*)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ **о)** $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1}$ **п)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

р) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$ **с*)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ **т)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **у)** $\displaystyle\int \sqrt{3-2x^2}\,dx$

---

[1] В качестве (трудного) примера найдём $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. Рассмотрим y, такое что $1 + x^2 = y^2$. Как и единичная окружность, гипербола $y^2 - x^2 = 1$ имеет рациональную параметризацию $y(t) = (1+t^2)/2t$, $x(t) = (1-t^2)/2t$ (в силу тождества $(1+t^2)^2 - (1-t^2)^2 = (2t)^2$). Поэтому подставляя $x = (1-t^2)/2t$, получим $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1}{y(t)} \cdot x'(t)\,dt = \int \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|$, где t выражено через x из квадратного уравнения $t^2 + 2tx - 1 = 0$ (обязательно проверьте ответ дифференцированием!).

Вычисление интегралов

М32◇1. Пусть f является хорошей функцией на отрезке, содержащем точки a, b, c. Докажите, что при любом взаимном расположении этих точек $\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx$.

М32◇2. Пусть f является хорошей функцией на $[a,b]$. Будет ли функция $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx$ всюду на $[a,b]$ **а)** непрерывна? **б)** дифференцируема?

М32◇3. Пусть в условиях зад. М32◇2 функция f непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$. Докажите, что тогда F дифференцируема в x_0 и найдите $F'(x_0)$.

М32◇4 (формула Ньютона - Лейбница). $\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) \quad \forall\, f \in \mathscr{C}^1([a,b])$ (докажите).

М32◇5 (интегрирование по частям). Верно ли, что $\forall\, f, g \in \mathscr{C}^1([a,b])$ имеет место равенство $\int\limits_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx$

М32◇6. Вычислите: **а)** $\int\limits_{-2}^{3} (x^3+x+1)\,dx$ **б)** $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x/3)\,dx$ **в)** $\int\limits_{1/2}^{8} \log_2 x\,dx$ **г)** $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$

д) $\displaystyle\int\limits_{-3}^{1} \frac{3x-1}{2x-5}\,dx$ **е)** $\int\limits_0^1 \sqrt{3x+1}\,dx$ **ж)** $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ **з)** $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\,dx$ **и)** $\displaystyle\int\limits_{-1/2}^{1/2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$

М32◇7 (теорема о среднем). Пусть f непрерывна на $[a,b]$. Существует ли $\xi \in [a,b]$, такое что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$?

М32◇8* (интегральная формула Тейлора). Для любой функции $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a,b])$ и произвольного $x \in [a,b]$ докажите равенство $f(x) = f(a) + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu + \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n)}(t)\,dt$.

Несобственные интегралы. Пусть функция f определена на $[a,b)$ (допускается значение $b=+\infty$) и является хорошей на любом отрезке $[a,t] \subset [a,b)$. Если существует $\lim\limits_{t\nearrow b}\int\limits_a^t f(x)\,dx$, то он называется *несобственным интегралом* от f по полуинтервалу $[a,b)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Если предела не существует, то говорят, что несобственный интеграл *расходится*. Аналогично определяется несобственные интегралы по полуинтервалам $(a,b]$.

М32◇9. При каких $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ сходится (и чему в этом случае равен) **а)** $\int\limits_0^1 x^{-\alpha}\,dx$ **б)** $\int\limits_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx$.

М32◇10. Вычислите или докажите расходимость: **а)** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ **б)** $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ **в)** $\int\limits_0^1 x\ln x\,dx$

г) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **д)** $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x}$ **е)** $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^\alpha}$, где $\alpha > 1$ **ж)** $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$ **з*)** $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$

М32◇11. Равносильна ли сходимость несобственного интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ **а)** если f неотрицательна и монотонна **б)** в общем случае.

Примеры длин и площадей

M33◇1. Вычислите площадь ограниченной фигуры, заключённой между кривыми:

а) $x + y = 2$ и $x^2 = y$ **б)** $x = y$ и $y = x + \sin^2 x$ **в)** $x = 0$, $y = 2$ и $y = 2^x$ **г*)** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

M33◇2. Какова площадь под графиком $\sin^2 x$ над любым отрезком длины $\pi k/2$ ($k \in \mathbb{N}$)?

M33◇3. Найдите $\displaystyle\int \sqrt{1 - x^2}dx$ и явным интегрированием получите формулу, выражающую площадь сегмента единичного круга через: **а)** высоту сегмента **б)** длину дуги

M33◇4°. Пусть точка P_t движется против часовой стрелки по единичной окружности $x^2+y^2 = 1$ так, что в момент времени $t = 0$ она находится в точке $P_0 = (1, 0)$ и при всех $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ площадь кругового сектора P_0OP_t равна $2|t|$. Выразите через t абсциссу и ординату точки P_t, а также ординату точки пересечения луча $[OP_t)$ с прямой $x = 1$.

Гиперболические функции. Пусть точка P_t движется снизу вверх по правой ветви «единичной гиперболы» $x^2 - y^2 = 1$ так, что в момент времени $t = 0$ она находится в точке $P_0 = (1, 0)$ и при всех $-\infty < t < +\infty$ площадь гиперболического сектора P_0OP_t равна $2|t|$. В этом случае абсцисса и ордината точки P_t называются *гиперболическим косинусом* и *гиперболическим синусом*, а ордината точки пересечения луча $[OP_t)$ с прямой $x = 1$ называется *гиперболическим тангенсом* числа t. Обозначения: $\operatorname{ch} t$, $\operatorname{sh} t$ и $\operatorname{th} t$. Отношение $\operatorname{cth} t \overset{\text{def}}{=} \operatorname{ch} t/ \operatorname{sh} t$ называется *гиперболическим котангенсом*.

M33◇5. Найдите $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$, явно вычислите площадь гиперболического сектора и выразите гиперболические функции через экспоненты $e^{\pm t}$ (обязательно сделайте проверку выполнения «основного гиперболического тождества» $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$).

M33◇6°. Выразите $\operatorname{th} t$ через $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t$ и выведите гиперболические тождества для:

а) приведения отрицательных аргументов (т. е. для $\operatorname{sh}(-t)$, $\operatorname{ch}(-t)$, $\operatorname{th}(-t)$ и $\operatorname{cth}(-t)$)

б) универсальной гиперболической подстановки (рациональная параметризация гиперболы «тангенсом половинного гиперболического угла»).

в) двойного аргумента (т. е. для $\operatorname{sh}(2t)$, $\operatorname{ch}(2t)$, $\operatorname{th}(2t)$ и $\operatorname{cth}(2t)$)

г) сложения аргументов (т. е. для $\operatorname{sh}(t_1 + t_2)$, $\operatorname{ch}(t_1 + t_2)$, $\operatorname{th}(t_1 + t_2)$ и $\operatorname{cth}(t_1 + t_2)$)

M33◇7. Каковы графики гиперболических функций, их производные и первообразные?

Длина дуги. Будем называть *гладкой параметризованной кривой* любое отображение $[a, b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2$, заданное в координатах парой непрерывно дифференцируемых функций $x = \gamma_1(t)$, $y = \gamma_2(t)$, таких что *вектор скорости* $v(t) \overset{\text{def}}{=} (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ не равен нулю ни при каком $a \leqslant t \leqslant b$. Интеграл $\int\limits_a^b |v(t)|\, dt$ называется *длиной* этой кривой.

M33◇8. Изменится ли длина кривой при замене параметризации γ на композицию $\gamma\circ\vartheta$ с произвольной монотонно возрастающей непрерывно дифференцируемой взаимно однозначной функцией $[c, d] \xrightarrow{\vartheta} [a, b]$? Что будет, если «возрастающая» заменить на «убывающая»?

M33◇9. Вычислите длину дуги кривой: **а)** $y = e^x$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$ **б)** $y = \ln \cos x$, где $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ **в)** $y = 2x^2$, где $0 \leqslant y \leqslant 3$ **г)** $y = \operatorname{ch} x$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$ **д)** $x = \operatorname{ch}^3 t$, $y = \operatorname{sh}^3 t$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$

M33◇10. Как относятся:

а) площадь петли кривой $y^2 = x\,(x - 1)^2$ к площади изопериметричного ей круга?

б*) периметр эллипса с полуосями $a > b$ к длине волны синусоиды $y = \sqrt{a^2 - b^2}\, \sin{(x/b)}$?

Решение некоторых дифференциальных уравнений

Дифференциальное уравнение k-того порядка на неизвестную функцию $y = y(x)$ переменной x — это соотношение вида $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(k)}) = 0$, в которое входит x, y и первые k производных $y', y'', \ldots, y^{(k)}$ от y по x. Его *решением* называется всякая функция $y = f(x)$, при подстановке которой в F вместо y получается тождественно нулевая функция от x.

М34◇1. Пусть $c = \text{const}$, дифференцируемые функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ являются решениями уравнения $y' = cy$ на некотором интервале и $g(x) \neq 0$ на этом интервале. Чему может быть равно отношение $f(x)/g(x)$?

М34◇2. Найдите все решения дифференциального уравнения $y' = cy$ на любом интервале.

М34◇3. Найдите все функции $(0, 1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, такие что $f' = -2f$ всюду на $(0, 1)$ и $f(1/2) = 1$.

М34◇4. Пусть на некотором интервале ненулевая функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению $y' - cy = 0$, а функция $z = z(x)$ — уравнению $z' - cz = h(x)$, где $c = \text{const}$, а $h(x)$ — данная функция. Выразите z/y через c и h и найдите все решения обоих уравнений.

М34◇5. Найдите все решения уравнений: **а)** $y' - 2y = x$ **б)** $y' + y = e^{2x}$ **в)** $y' + 3y = \cos(2x)$

М34◇6°. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — это все корни многочлена $\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Верно ли, что $y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \left(\dfrac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\dfrac{d}{dx} - \lambda_2\right)\cdots\left(\dfrac{d}{dx} - \lambda_k\right) y\,?$

М34◇7. Найдите все решения уравнений: **а)** $y'' = y$ **б)** $y'' - y' = 2y$ **в)** $y'' + y = 2y'$.

М34◇8. Выделите в предыдущей задаче те решения, которые удовлетворяют условиям:
а) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ **б)** $y(-1) = y(1) = 1$

Комплекснозначные функции. Любая функция $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ однозначно записывается в виде $f(x) = u(x) + iv(x)$, где $u, v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ суть вещественнозначные функции, называемые *вещественной* и *мнимой* частями f. Положим, по определению, $f' = u' + iv'$ и $\int f\,dx = \int u\,dx + i\int v\,dx$.

М34◇9. Найдите вещественную и мнимую части функций $z = e^{(2+3i)x}$ и $z = e^{(2-3i)x}$.

М34◇10. Докажите, что комплекснозначная функция тогда и только тогда удовлетворяет дифференциальному уравнению вида $y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ с постоянными $a_\nu \in \mathbb{R}$, когда её вещественная и мнимая части удовлетворяют этому уравнению.

М34◇11. Найдите все комплекснозначные функции $z = z(x)$, удовлетворяющие уравнениям (константа $\lambda \in \mathbb{C}$ и комплекснозначная функция $h(x)$ заданы):
а) $z' - \lambda z = 0$ **б)** $z' - \lambda z = h(x)$

М34◇12. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения $y'' = -y$.

М34◇13. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения $y'' = -2y$, удовлетворяющие условиям: **а)** $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ **б)** $y(0) = 1$, $y(\pi) = 0$.

М34◇14*. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения $y'' + y = e^{4x}$ с $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

М34◇15 (разделённые переменные). Докажите, что дифференцируемая функция y тогда и только тогда удовлетворяет дифференциальному уравнению $h(y)y' = g(x)$ с заданными непрерывными функциями $h(y)$, $g(x)$, когда при некотором постоянном c она удовлетворяет обычному (не дифференциальному) уравнению $H(y) = G(x) + c$, в котором H и G суть какие-либо первообразные от h и g.

М34◇16. Найдите все решения дифференциальных уравнений:
а) $(x + 1)y' = xy$ **б)** $y' = y\sin x$ **в)** $yy' + x = 1$

М34◇17. Найдите все решения дифференциального уравнения $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$ с $y(0) = -1$.

Теорема существования решения обыкновенного дифференциального уравнения

Постановка задачи. На плоскости XOY заданы: прямоугольник $\Pi = \{\,(x,y)\mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\,\}$ точка (x_0, y_0), лежащая строго внутри него, и дифференциальное уравнение $y' = F(x,y)$, правая часть которого $\Pi \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ является непрерывной функцией на Π. Мы докажем, что существует ε-окрестность U_ε точки x_0 и дифференцируемая функция $U_\varepsilon \xrightarrow{f} [c,d]$, такие что $f'(x) = F(x, f(x)) \quad \forall\, x \in U_\varepsilon$ и $f(x_0) = y_0$.

М$34\frac{1}{2}\diamond$1. Зададимся некоторой ε-окрестностью U_ε точки x_0 и рассмотрим следующие два множества дифференцируемых функций $U_\varepsilon \xrightarrow{\varphi} [c,d]$, заданных на этой окрестности:

$$\mathscr{F}^{\uparrow} \overset{\text{def}}{=} \{\,\varphi \mid\ \forall\, x \in U_\varepsilon\ \ \varphi'(x) > F(x, \varphi(x))\,\}$$
$$\mathscr{F}_{\downarrow} \overset{\text{def}}{=} \{\,\varphi \mid\ \forall\, x \in U_\varepsilon\ \ \varphi'(x) < F(x, \varphi(x))\,\}$$

Докажите, что $\exists\ \varepsilon > 0$: оба множества $\mathscr{F}^{\uparrow}$, $\mathscr{F}_{\downarrow}$ непусты, и справа от x_0 график любой функции из $\mathscr{F}^{\uparrow}$ лежит выше графика любой функции из $\mathscr{F}_{\downarrow}$, а слева — наоборот.

М$34\frac{1}{2}\diamond$2 (существование решения). Определим функцию $f(x)$ справа от x как $\inf\limits_{\varphi \in \mathscr{F}^{\uparrow}} \varphi(x)$, слева от x как $\sup\limits_{\varphi \in \mathscr{F}^{\uparrow}} \varphi(x)$ и положим $f(x_0) = y_0$. Докажите, что f существует, непрерывна, дифференцируема и удовлетворяет уравнению $y' = F(x,y)$.

Обозначения. Пусть $C = \sup\limits_{\Pi} |F(x,y)|$. Обозначим через D_δ отрезок $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, где δ выбрано так, чтобы «бабочка» $B_\delta \overset{\text{def}}{=} \{\,(x,y) \mid x \in D_\delta, |y - y_0| \leqslant C|x - x_0|\}$ лежала целиком внутри Π. Обозначим через $\mathscr{M}_\delta$ множество всех непрерывных функций $D_\delta \xrightarrow{\varphi} [c,d]$, график которых содержится в B_d.

М$34\frac{1}{2}\diamond$3. Докажите, что $\mathscr{M}_\delta$ является полным метрическим пространством с расстоянием

$$\varrho(\varphi, \psi) = \sup_{x \in D_\delta} |\varphi(x) - \psi(x)|\ .$$

М$34\frac{1}{2}\diamond$4 (лемма Асколи - Арцела). Дано некоторое множество $\mathscr{F}$ непрерывных функций на отрезке. Докажите, что для того, чтобы любая ограниченная последовательность функций из $\mathscr{F}$ содержала поточечно сходящуюся подпоследовательность[1], необходимо и достаточно, чтобы все функции в $\mathscr{F}$ были ограничены общей константой и *единообразно* непрерывны в том смычле, что $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$ сразу для всех $\varphi \in \mathscr{F}$.

М$34\frac{1}{2}\diamond$5 (ломаные Эйлера). Разобъём D_δ на $2n$ равных частей длины $h = \delta/n$ и определим непрерывную функцию $\varphi_n(x)$, полагая $\varphi(x_0) = y_0$ и продолжая её влево и вправо по такому правилу: для $k = 0, 1, 2, \dots$ над отрезком $[x_0 + kh, x_0 + (k+1)h]$ и для $k = 0, -1, -2, \dots$ над отрезком $[x_0 + (k-1)h, x_0 + kh]$ график $\varphi(x)$ является прямой с угловым коэффициентом $F(x_0 + kh, \varphi(x_0 + kh))$. Убедитесь, что все φ_n лежат в $\mathscr{M}_\delta$ и из них можно выбрать подпоследовательность, имеющую поточечный предел, также лежащий в $\mathscr{M}_\delta$.

М$34\frac{1}{2}\diamond$6. Явно опишите последовательность ломаных Эйлера для уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$ и шагом $h = 1/n$, и честно найдите её предел при $n \to \infty$.

М$34\frac{1}{2}\diamond$7. Докажите, что поточечный предел любой сходящейся последовательности ломаных Эйлера из зад. М$34\frac{1}{2}\diamond$5 является дифференцируемой функцией, удовлетворяющий уравнению $y' = F(x,y)$ (мы ещё вернёмся к этому в зад. М$34\frac{2}{3}\diamond$8).

[1] предел которой не обязан принадлежать $\mathscr{F}$

Теорема единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения

М$34\frac{2}{3}\diamond$1. Найдите все решения уравнения $y' = y^{2/3}$ и укажите два различных решения, удовлетворяющие начальному условию $y(0) = 0$.

Постановка задачи. Всюду в этом листке константа C, прямоугольник Π, «бабочка» $B_\delta \subset \Pi$, отрезок $D_\delta \ni x_0$ и пространство $\mathscr{M}_\delta$ непрерывных функций на D_δ с графиками внутри B_δ будут те же самые, что и в предыдущем листке. Мы докажем, что если правая часть дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$ удовлетворяет дополнительному *условию Липшица*:

$$\exists\, L \in \mathbb{R} : |F(x, y_1) - F(x, y_2)| < L \cdot |y_1 - y_2| \quad \forall\, x \in [a, b] \ \& \ \forall\, y_1, y_2 \in [c, d] \tag{1}$$

то любые два решения дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$, графики которых проходят через точку (x_0, y_0), совпадают над некоторой непустой δ-окрестностью точки x_0.

М$34\frac{2}{3}\diamond$2 (приближения Пикара). Будем строить последовательные приближения $\psi_k(x) \in \mathscr{M}_\delta$ к решению уравнения $y' = F(x, y)$, взяв $\psi_0(x) \equiv y_0$ и подбирая в качестве ψ_{k+1} такую дифференцируюмую функцию, производная от которой равна значениям функции F на графике предыдущего приближения ψ_k, т. е. такую что $\psi'_{k+1}(x) = F(x, \psi_k(x))$ при $x \in D_\delta$ и $\psi_{k+1}(x_0) = y_0$. Докажите, что $\psi_{k+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} F(t, \psi_k(t))\, dt$ и проверьте, что все $\psi_k \in \mathscr{M}_\delta$.

М$34\frac{2}{3}\diamond$3. Явно вычислите все приближения Пикара для уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$ и честно найдите их предел.

М$34\frac{2}{3}\diamond$4. Пусть функция F удовлетворяет условию (1). Докажите, что при достаточно малом δ правило $P : \psi(x) \longmapsto P\psi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} F(t, \psi(t))\, dt$ определяет сжимающее отображение $\mathscr{M}_\delta \xrightarrow{P} \mathscr{M}_\delta$.

М$34\frac{2}{3}\diamond$5. Докажите, что функция $\psi \in \mathscr{M}_\delta$ тогда и только тогда является решением уравнения $y' = F(x, y)$, когда $P\psi = \psi$.

М$34\frac{2}{3}\diamond$6. Докажите сформулированную в начале листка теорему единственности. Как она уживается с примером из зад. М$34\frac{2}{3}\diamond$1?

М$34\frac{2}{3}\diamond$7. Пусть отображение $\mathscr{M} \xrightarrow{P} \mathscr{M}$ (в произвольном метрическом пространстве) является сжимающим, т. е. $\varrho(P\varphi, P\psi) \leqslant \lambda \varrho(\varphi, \psi)\ \forall\, \varphi, \psi \in \mathscr{M}$, где $0 < \lambda < 1$. Докажите, что расстояние от произвольной точки $\psi \in \mathscr{M}$ до неподвижной точки ψ_0 отображения P удовлетворяет неравенству $\varrho(\psi, \psi_0) \leqslant \dfrac{\varrho(\psi, P\psi)}{1 - \lambda}$.

М$34\frac{2}{3}\diamond$8. Докажите, что если функция F удовлетворяет условию Липшица (1), то *вся* последовательность ломаных Эйлера из зад. М$34\frac{1}{2}\diamond$5 *равномерно* (т. е. в метрике $\mathscr{M}_\delta$, а не поточечно) сходится к решению уравнения $y' = F(x, y)$.

М$34\frac{2}{3}\diamond$9* (теорема о непрерывной зависимости от начальных условий). Пусть функция F удовлетворяет условию (1). Докажите, что у точки (x_0, y_0) существует окрестность $\widetilde{\Pi} \subset \Pi$, такая что при некотором фиксированном $\delta > 0$ и произвольных $(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \in \widetilde{\Pi}$ уравнение $y' = F(x, y)$ будет обладать единственным решением $y = f(x)$, определённым всюду на D_δ и удовлетворяющим начальному условию $f(\widetilde{x}_0) = \widetilde{y}_0$, и более того, сопоставление точке $(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \in \widetilde{\Pi}$ такого решения будет непрерывным отображением из $\widetilde{\Pi}$ в пространство непрерывных функций на D_δ.

Дифференциальное исчисление

Напоминание. Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 — это линейная функция от $(x - x_0)$, приближающая $f(x) - f(x_0)$ с погрешностью, которая при $x \to x_0$ стремится к нулю быстрее, чем $(x - x_0)$. Дифференциал обычно обозначают $df|_{x=x_0}$ или просто df. Будучи линейной функцией от $x - x_0$, дифференциал имеет вид $c(x_0) \cdot (x - x_0)$, где $c(x_0)$ — постоянный коэффициент (свой для каждой точки x_0). Поэтому часто пишут $df|_{x=x_0} = c(x_0)\,dx$, ибо $dx|_{x=x_0} = (x - x_0)\ \forall\, x_0$. Опыт показывает, что найти линейную часть приращения неизвестной функции проще, чем саму функцию, так что при отыскании функций, описывающих те или иные явления природы, обычно сначала находят соотношения на их дифференциалы, а потом уже — при помощи интегрирования — сами функции.

М35◇1. Прирост численности недавно обнаруженных жутких космических зубастиков пропорционален числу всевозможных их пар. По данным голливудской обсерватории, за прошедший год поголовье зубастиков удвоилось. Как скоро их станет бесконечно много? Смогли бы они бесконечно размножиться за конечное время, кабы их прирост был пропорционален их численности?

М35◇2. Скорость радиоактивного распада пропорциональна имеющемуся количеству активного вещества; через какое время распадётся $3/4$ вещества с периодом полураспада 1 год?

М35◇3. За какое время вытечет вся вода из полного **а)** вертикального **б)** горизонтального цилиндрического бака $\varnothing\, 1{,}8$*м* длиной $2{,}45$*м* через круглую $\varnothing\, 6$*см* дырку в дне?

М35◇4. С какой силой должен тянуть теплоход за причальный канат, делающий 3 оборота вокруг столба $\varnothing\, 40$*см* (коэффициент трения $1/3$), чтобы его не смог удержать причальный рабочий, тянущий за другой конец каната с силой[1] 10*кг*?

М35◇5. На десятиградусном морозе чашка кипятку за полчаса остыла до 20°. В какой момент её температура была 40°?

М35◇6 (формула Циолковского). Какой скорости достигнет ракета массы m после отработки всего топлива массы M? Скорость истечения топлива v, никаких внешних сил нет.

М35◇7 (объём тела вращения). Функция f неотрицательна и непрерывно дифференцируема на $[0, a)$. Обозначим через $V(t)$ объём тела, заметаемого областью $0 \leqslant x \leqslant t$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ при её вращении вокруг оси OX. Вычислите дифференциал[2] $dV|_{t=x}$ и найдите $V(t)$.

М35◇8 (площадь поверхности тела вращения). В условиях зад. М35◇7 обозначим через $S(t)$ площадь боковой поверхности того же самого тела вращения. Вычислите дифференциал[3] $dS|_{t=x}$ и найдите $S(t)$.

М35◇9. Выразите через радиусы оснований и высоту объём и площадь поверхности усечённого прямого кругового: **а)** конуса **б)** параболойда **в)** гиперболойда.

М35◇10. Выразите объём и площадь поверхности шара через радиус.

М35◇11. Конечны ли: **а)** объём **б)** площадь поверхности фигуры $x^2 \geqslant y^2 + z^2$, $x \geqslant 1$?

М35◇12 (теорема Архимеда). Вычислите площадь поверхности пояса сферы, заключенного между двумя параллельными плоскостями, и убедитесь, что он зависит лишь от расстояния между плоскостями, но не от расстояния от них до центра сферы.

М35◇13* (плоскость Лобачевского). Из оптики известно, что синус угла, образуемого лучом света с нормалью к границе, разделяющей разные среды, обратно пропорционален показателям преломления этих сред: $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$, где n_1, n_2 — показатели преломления, а α_1, α_2 — соответствующие углы. Найдите траектории световых лучей в верхней полуплоскости $x \geqslant 0$ с показателем преломления $n(x, y) = 1/y$.

[1] т. е. с той же силой, с которой действует на чашку весов гиря в 10*кг*

[2] подсказка: сравните приращение объёма в точке x с объёмом цилиндра радиуса $f(x)$.

[3] подсказка: сравните приращение площади с площадью боковой поверхности соприкасающегося конуса (а площадь последней легко подсчитать развернув её на плоскости).