Письменный экзамен по анализу

- **на решение задач и запись решений отводится 4 часа;**
- **задачи можно решать в любом порядке;**
- **правильное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов;**
- **для получения оценки *уд/хор/отл* достаточно набрать соотв. $\geqslant 20$ / $\geqslant 36$ / $\geqslant 56$ баллов**

ИК1◇1 (10 баллов). Может ли a^3+b^3 делиться на 391, если целые a и b таковы, что $a+b$ не делится на 391 ?

ИК1◇2 (10 баллов). Сумма трех комплексных чисел равна 0, сумма их квадратов также равна 0, сумма кубов также равна 0. Верно ли, что сумма четвертых степеней этих чисел также равна 0?

ИК1◇3 (10 баллов). Покажите, что число

$$\cos\left(\frac{5\pi}{33}\right)\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{33}\right)\cdot\cos\left(\frac{10\pi}{33}\right)\cdot\cos\left(\frac{13\pi}{33}\right)\cdot\cos\left(\frac{14\pi}{33}\right)$$

рационально.

ИК1◇4 (10 баллов). Для каждого положительного действительного x обозначим через $d(x)$ количество десятичных знаков в целой части $[x]$. Найдите

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d\left(\sqrt{n}\right)}{d(n)}\ .$$

ИК1◇5 (10 баллов). Может ли уравнение $p(x)=2^x$, где $p(x)$ — многочлен n-той степени, иметь больше $n+1$ решений?

ИК1◇6 (10 баллов). Найдите кратчайшее расстояние между прямой, пересекающей оси координат точках $x=2$ и $y=3$ и гиперболой $xy=5$.

ИК1◇7 (10 баллов). Оси двух бесконечных цилиндров радиуса ϱ пересекаются под острым углом α. Найдите объем пересечения внутренностей этих цилиндров.