Письменный экзамен по анализу

- **на решение задач и запись решений отводится 4,5 часа;**
- **задачи можно решать в любом порядке;**
- **правильное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов;**
- **для получения оценки *уд/хор/отл* достаточно набрать соотв. $\geqslant 23$ / $\geqslant 46$ / $\geqslant 69$ баллов**

ИК1◇1 (10 баллов). Найдите наибольший общий делитель чисел

$$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19+23\cdot29\cdot31\cdot37\cdot41\cdot43$$

и

$$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13+17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot37\cdot41\cdot43\,.$$

ИК1◇2 (10 баллов). На какую цифру заканчивается десятичная запись числа, выражающего количество 25-элементных подмножеств 125-элементного множества?

ИК1◇3 (10 баллов). Разрешается поменять местами концы диагоналей любой грани куба. Сколько различных перестановок вершин можно получить композициями таких преобразований?

ИК1◇4 (10 баллов). Некоторое множество попарно непересекающихся отрезков[1] прямой покрасили в белый цвет. Может ли так случиться, что на любом отрезке есть белая точка?

ИК1◇5 (10 баллов). Правильно решите уравнение, которые неверно решает программа «Maple»:

$$\arcsin\left(2t\sqrt{1-t^2}\right)=2\,\arcsin t\,.$$

ИК1◇6 (10 баллов). Укажите какое-нибудь $M>0$, такое что при всех $x>M$ погрешность приближенной формулы $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\approx\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ не превосходит $0,01\%$ ее правой части.

ИК1◇7 (10 баллов). Опишите и изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел a, для которых уравнение $z+\dfrac{1}{z}=a$ имеет решение, по модулю меньшее единицы.

ИК1◇8 (10 баллов). Положительные действительные числа $p_1,p_2,\ldots,p_n$ и $q_1,q_2,\ldots,q_n$ связаны соотношениями $p_1+p_2+\cdots+p_n=q_1+q_2+\cdots+q_n=1$. Найдите наименьшее значение суммы $p_1\cdot\ln\left(\dfrac{p_1}{q_1}\right)+p_2\cdot\ln\left(\dfrac{p_2}{q_2}\right)+\cdots+p_n\cdot\ln\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ и опишите все случаи, когда оно достигается.

ИК1◇9 (10 баллов). Найдите $\displaystyle\int\limits_0^2 g(x)\,dx$, где $g(a)$ есть решение уравнения $x+x^5=a$.

[1] точка отрезком не считается