Дифференциальное исчисление

Напоминание. Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 — это линейная функция от $(x-x_0)$, приближающая $f(x)-f(x_0)$ с погрешностью, которая при $x\to x_0$ стремится к нулю быстрее, чем $(x-x_0)$. Дифференциал обычно обозначают $df|_{x=x_0}$ или просто df. Будучи линейной функцией от $x-x_0$, дифференциал имеет вид $c(x_0)\cdot(x-x_0)$, где $c(x_0)$ — постоянный коэффициент (свой для каждой точки x_0). Поэтому часто пишут $df|_{x=x_0}=c(x_0)\,dx$, ибо $dx|_{x=x_0}=(x-x_0)\ \forall\, x_0$. Опыт показывает, что найти линейную часть приращения неизвестной функции проще, чем саму функцию, так что при отыскании функций, описывающих те или иные явления природы, обычно сначала находят соотношения на их дифференциалы, а потом уже — при помощи интегрирования — сами функции.

М35◇1. Прирост численности недавно обнаруженных жутких космических зубастиков пропорционален числу всевозможных их пар. По данным голливудской обсерватории, за прошедший год поголовье зубастиков удвоилось. Как скоро их станет бесконечно много? Смогли бы они бесконечно размножиться за конечное время, кабы их прирост был пропорционален их численности?

М35◇2. Скорость радиоактивного распада пропорциональна имеющемуся количеству активного вещества; через какое время распадётся $3/4$ вещества с периодом полураспада 1 год?

М35◇3. За какое время вытечет вся вода из полного **а)** вертикального **б)** горизонтального цилиндрического бака $\varnothing\,1{,}8\,м$ длиной $2{,}45\,м$ через круглую $\varnothing\,6\,см$ дырку в дне?

М35◇4. С какой силой должен тянуть теплоход за причальный канат, делающий 3 оборота вокруг столба $\varnothing\,40\,см$ (коэффициент трения $1/3$), чтобы его не смог удержать причальный рабочий, тянущий за другой конец каната с силой[1] $10\,кг$?

М35◇5. На десятиградусном морозе чашка кипятку за полчаса остыла до $20°$. В какой момент её температура была $40°$?

М35◇6 (формула Циолковского). Какой скорости достигнет ракета массы m после отработки всего топлива массы M? Скорость истечения топлива v, никаких внешних сил нет.

М35◇7 (объём тела вращения). Функция f неотрицательна и непрерывно дифференцируема на $[0,a)$. Обозначим через $V(t)$ объём тела, заметаемого областью $0\leqslant x\leqslant t$, $0\leqslant y\leqslant f(x)$ при её вращении вокруг оси OX. Вычислите дифференциал[2] $dV|_{t=x}$ и найдите $V(t)$.

М35◇8 (площадь поверхности тела вращения). В условиях зад. М35◇7 обозначим через $S(t)$ площадь боковой поверхности того же самого тела вращения. Вычислите дифференциал[3] $dS|_{t=x}$ и найдите $S(t)$.

М35◇9. Выразите через радиусы оснований и высоту объём и площадь поверхности усечённого прямого кругового: **а)** конуса **б)** параболоида **в)** гиперболоида.

М35◇10. Выразите объём и площадь поверхности шара через радиус.

М35◇11. Конечны ли: **а)** объём **б)** площадь поверхности фигуры $x^2\geqslant y^2+z^2$, $x\geqslant 1$?

М35◇12 (теорема Архимеда). Вычислите площадь поверхности пояса сферы, заключенного между двумя параллельными плоскостями, и убедитесь, что он зависит лишь от расстояния между плоскостями, но не от расстояния от них до центра сферы.

М35◇13* (плоскость Лобачевского). Из оптики известно, что синус угла, образуемого лучом света с нормалью к границе, разделяющей разные среды, обратно пропорционален показателям преломления этих сред: $n_1\sin\alpha_1=n_2\sin\alpha_2$, где n_1, n_2 — показатели преломления, а α_1, α_2 — соответствующие углы. Найдите траектории световых лучей в верхней полуплоскости $x\geqslant 0$ с показателем преломления $n(x,y)=1/y$.

---

[1] т. е. с той же силой, с которой действует на чашку весов гиря в $10\,кг$

[2] ПОДСКАЗКА: сравните приращение площади с площадью боковой поверхности соприкасающегося конуса (а площадь последней легко посчитать развернув её на плоскости).

[3] ПОДСКАЗКА: сравните приращение объёма в точке x с объёмом цилиндра радиуса $f(x)$.