Примеры длин и площадей

М33◇1. Вычислите площадь ограниченной фигуры, заключённой между кривыми:

а) $x+y=2$ и $x^2=y$ **б)** $x=y$ и $y=x+\sin^2 x$ **в)** $x=0$, $y=2$ и $y=2^x$ **г*)** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

М33◇2. Какова площадь под графиком $\sin^2 x$ над любым отрезком длины $\pi k/2$ ($k\in\mathbb{N}$)?

М33◇3. Найдите $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ и явным интегрированием получите формулу, выражающую площадь сегмента единичного круга через: **а)** высоту сегмента **б)** длину дуги

М33◇4°. Пусть точка P_t движется против часовой стрелки по единичной окружности $x^2+y^2=1$ так, что в момент времени $t=0$ она находится в точке $P_0=(1,0)$ и при всех $-\pi\leqslant t\leqslant\pi$ площадь кругового сектора P_0OP_t равна $2|t|$. Выразите через t абсциссу и ординату точки P_t, а также ординату точки пересечения луча $[OP_t)$ с прямой $x=1$.

Гиперболические функции. Пусть точка P_t движется снизу вверх по правой ветви «единичной гиперболы» $x^2-y^2=1$ так, что в момент времени $t=0$ она находится в точке $P_0=(1,0)$ и при всех $-\infty<t<+\infty$ площадь гиперболического сектора P_0OP_t равна $2|t|$. В этом случае абсцисса и ордината точки P_t называются *гиперболическим косинусом* и *гиперболическим синусом*, а ордината точки пересечения луча $[OP_t)$ с прямой $x=1$ называется *гиперболическим тангенсом* числа t. Обозначения: $\operatorname{ch}t$, $\operatorname{sh}t$ и $\operatorname{th}t$. Отношение $\operatorname{cth}t\overset{\text{def}}{=}\operatorname{ch}t/\operatorname{sh}t$ называется *гиперболическим котангенсом*.

М33◇5. Найдите $\int\sqrt{x^2-1}\,dx$, явно вычислите площадь гиперболического сектора и выразите гиперболические функции через экспоненты $e^{\pm t}$ (обязательно сделайте проверку выполнения «основного гиперболического тождества» $\operatorname{ch}^2t-\operatorname{sh}^2t=1$).

М33◇6°. Выразите $\operatorname{th}t$ через $\operatorname{sh}t$, $\operatorname{ch}t$ и выведите гиперболические тождества для:

а) приведения отрицательных аргументов (т.е. для $\operatorname{sh}(-t)$, $\operatorname{ch}(-t)$, $\operatorname{th}(-t)$ и $\operatorname{cth}(-t)$)

б) универсальной гиперболической подстановки (рациональная параметризация гиперболы «тангенсом половинного гиперболического угла»).

в) двойного аргумента (т.е. для $\operatorname{sh}(2t)$, $\operatorname{ch}(2t)$, $\operatorname{th}(2t)$ и $\operatorname{cth}(2t)$)

г) сложения аргументов (т.е. для $\operatorname{sh}(t_1+t_2)$, $\operatorname{ch}(t_1+t_2)$, $\operatorname{th}(t_1+t_2)$ и $\operatorname{cth}(t_1+t_2)$)

М33◇7. Каковы графики гиперболических функций, их производные и первообразные?

Длина дуги. Будем называть *гладкой параметризованной кривой* любое отображение $[a,b]\xrightarrow{\gamma}\mathbb{R}^2$, заданное в координатах парой непрерывно дифференцируемых функций $x=\gamma_1(t)$, $y=\gamma_2(t)$, таких что *вектор скорости* $v(t)\overset{\text{def}}{=}(\gamma_1'(t),\gamma_2'(t))$ не равен нулю ни при каком $a\leqslant t\leqslant b$. Интеграл $\int\limits_a^b|v(t)|\,dt$ называется *длиной* этой кривой.

М33◇8. Изменится ли длина кривой при замене параметризации γ на композицию $\gamma\circ\vartheta$ с произвольной монотонно возрастающей непрерывно дифференцируемой взаимно однозначной функцией $[c,d]\xrightarrow{\vartheta}[a,b]$? Что будет, если «возрастающая» заменить на «убывающая»?

М33◇9. Вычислите длину дуги кривой: **а)** $y=e^x$, где $0\leqslant x\leqslant 1$ **б)** $y=\ln\cos x$, где $0\leqslant x\leqslant\pi/4$ **в)** $y=2x^2$, где $0\leqslant y\leqslant 3$ **г)** $y=\operatorname{ch}x$, где $0\leqslant x\leqslant 1$ **д)** $x=\operatorname{ch}^3t$, $y=\operatorname{sh}^3t$, где $0\leqslant t\leqslant 1$

М33◇10. Как относятся:

а) площадь петли кривой $y^2=x\,(x-1)^2$ к площади изопериметричного ей круга?

б*) периметр эллипса с полуосями $a>b$ к длине волны синусоиды $y=\sqrt{a^2-b^2}\,\sin\,(x/b)$?