Вычисление интегралов

М32◇1. Пусть f является хорошей функцией на отрезке, содержащем точки a, b, c. Докажите, что при любом взаимном расположении этих точек $\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx$.

М32◇2. Пусть f является хорошей функцией на $[a,b]$. Будет ли функция $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx$ всюду на $[a,b]$ **а)** непрерывна? **б)** дифференцируема?

М32◇3. Пусть в условиях зад. М32◇2 функция f непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$. Докажите, что тогда F дифференцируема в x_0 и найдите $F'(x_0)$.

М32◇4 (формула Ньютона - Лейбница). $\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) \quad \forall\, f \in \mathscr{C}^1([a,b])$ (докажите).

М32◇5 (интегрирование по частям). Верно ли, что $\forall\, f,g \in \mathscr{C}^1([a,b])$ имеет место равенство $\int\limits_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx$

М32◇6. Вычислите: **а)** $\int\limits_{-2}^{3} (x^3+x+1)\,dx$ **б)** $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x/3)\,dx$ **в)** $\int\limits_{1/2}^{8} \log_2 x\,dx$ **г)** $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$

д) $\displaystyle\int\limits_{-3}^{1} \frac{3x-1}{2x-5}\,dx$ **е)** $\int\limits_0^1 \sqrt{3x+1}\,dx$ **ж)** $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ **з)** $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\,dx$ **и)** $\displaystyle\int\limits_{-1/2}^{1/2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$

М32◇7 (теорема о среднем). Пусть f непрерывна на $[a,b]$. Существует ли $\xi \in [a,b]$, такое что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$?

М32◇8* (интегральная формула Тейлора). Для любой функции $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a,b])$ и произвольного $x \in [a,b]$ докажите равенство $f(x) = f(a) + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}\,(x-a)^\nu + \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n)}(t)\,dt$.

Несобственные интегралы. Пусть функция f определена на $[a,b)$ (допускается значение $b=+\infty$) и является хорошей на любом отрезке $[a,t] \subset [a,b)$. Если существует $\lim\limits_{t\nearrow b}\int\limits_a^t f(x)\,dx$, то он называется *несобственным интегралом* от f по полуинтервалу $[a,b)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Если предела не существует, то говорят, что несобственный интеграл *расходится*. Аналогично определяется несобственные интегралы по полуинтервалам $(a,b]$.

М32◇9. При каких $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ сходится (и чему в этом случае равен) **а)** $\int\limits_0^1 x^{-\alpha}\,dx$ **б)** $\int\limits_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx$.

М32◇10. Вычислите или докажите расходимость: **а)** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ **б)** $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ **в)** $\int\limits_0^1 x\ln x\,dx$

г) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **д)** $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x}$ **е)** $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^\alpha}$, где $\alpha > 1$ **ж)** $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$ **з*)** $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$

М32◇11. Равносильна ли сходимость несобственного интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ **а)** если f неотрицательна и монотонна **б)** в общем случае.