Первообразные

Определение и обозначения. Функция $y = F(x)$ называется *первообразной* функции $y = f(x)$ на некотором интервале (отрезке), если $F'(x) = f(x)$ всюду на этом интервале (отрезке). Обозначение: $F(x) = \int f(x)\,dx$. Это обозначение не вполне корректно, поскольку $\forall\ C \in \mathbb{R}$ функция $F(x) + C$ также является первообразной для f, и точно также можно написать, что $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

М31◇1. Есть ли функции, у которых нет первообразных?

М31◇2. Пусть $F'(x) = f(x)$. Найдите все остальные первообразные от f.

М31◇3. Найдите все первообразные от: **а)** произвольного многочлена **б)** $\sin x$ **в)** $\cos x$ **г)** e^x **д)** x^α, $\alpha \neq 0, 1$ **е)** $\sqrt[3]{1+x}$ **ж)** $1/x$ **з)** $(1+x^2)^{-1}$ **и)** $(1-x^2)^{-1/2}$ **к)** $(1-x^2)^{-1}$ **л)** $\sin^{-2} x$ **м)** $\cos^{-2} x$ **н)** $(x+b)^{-1}$ **о)** $(ax+b)^{-1}$ **п)** $(ax+b)^\alpha$ (всюду $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$)

М31◇4. Пусть $F'(x) = f(x)$. Найдите все первообразные от $g(x) = f(ax+b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

М31◇5. В приводимых ниже равенствах предполагается, что все написанные в правых частях первообразные существуют, а $C \in \mathbb{R}$ — произвольная константа. Верные равенства докажите, неверные — опровергните: **а)** $\int \Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx + C = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

б) $\int f(x)g(x)\,dx + C = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$ **в)** $\int \lambda f(x)\,dx + C = \lambda \int f(x)\,dx\ \forall\,\lambda \in \mathbb{R}$

г) (интегрирование по частям) $\int f'(x)g(x)\,dx + C = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

М31◇6. Вычислите первообразные: **а)** $\int xe^x\,dx$ **б)** $\int x^2e^x\,dx$ **в)** $\int \ln x\,dx$ **г)** $\int \cos\ln x\,dx$

д) $\int x\,\cos x\,dx$ **е)** $\int \sin^2 x\,dx$ **ж)** $\int \operatorname{arctg} x\,dx$ **з)** $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ **и)** $\int e^{2x}\cos(3x)\,dx$

М31◇7 (замена переменного). Пусть функция $x = x(t)$ дифференцируема, а функция $y = f(x)$ является производной от функции $y = F(x)$. Верно ли, что $\int f(x(t))x'(t)\,dt = F(x(t)) + C$ с произвольным $C = \text{const}$?

М31◇8. Вычислите первообразные[1]: **а)** $\int \frac{dx}{2-3x}$ **б)** $\int \frac{3x-1}{2-5x}\,dx$ **в)** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2-5}}$

г) $\int e^{3x-2}\,dx$ **д)** $\int 2^{5x-3}\,dx$ **е)** $\int \log_5(1-3x)\,dx$ **ж)** $\int \sin(5x+1)\,dx$

з) $\int \sin(2x)\cos(3x)\,dx$ **и)** $\int \operatorname{tg} x\,dx$ **к)** $\int \operatorname{ctg} x\,dx$ **л)** $\int \sin^2 x\,\cos^3 x\,dx$

м) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ **н*)** $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ **о)** $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1}$ **п)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

р) $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$ **с*)** $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ **т)** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **у)** $\int \sqrt{3-2x^2}\,dx$

---

[1] В качестве (трудного) примера найдём $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. Рассмотрим y, такое что $1 + x^2 = y^2$. Как и единичная окружность, гипербола $y^2 - x^2 = 1$ имеет рациональную параметризацию $y(t) = (1+t^2)/2t$, $x(t) = (1-t^2)/2t$ (в силу тождества $(1+t^2)^2 - (1-t^2)^2 = (2t)^2$). Поэтому подставляя $x = (1-t^2)/2t$, получим $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1}{y(t)} \cdot x'(t)\,dt = \int \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|$, где t выражено через x из квадратного уравнения $t^2 + 2tx - 1 = 0$ (обязательно проверьте ответ дифференцированием!).