Интеграл по отрезку

Интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — это *учитываемая со знаком площадь, ограниченная графиком функции* $f(x)$ *над ориентированным отрезком* $[a,b]$, где «учёт со знаком» означает, что при $a<b$ та часть графика, где $f(x)>0$, учитывается с плюсом, а та часть, где $f(x)<0$ — с минусом, а «ориентированность отрезка» проявляется в том, что при проходе отрезка справа налево у всего интеграла следует сменить знак, т. е. $\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} -\int\limits_b^a f(x)\,dx$. Придать точный смысл словам «площадь, ограниченная графиком» можно *не для всех* функций. Мы сделаем это для любой функции $[a,b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$, являющейся *равномерным пределом последовательности ступенчатых функций* $\varphi_n(x)\rightrightarrows f(x)$. Такую функцию f мы будем называть *хорошей*[1]. Согласно зад. М29◇8 все монотонные и все непрерывные функции являются хорошими.

Начнём с того, что интеграл от константы равен площади соответствующего прямоугольника, а от ступенчатой функции — сумме площадей прямоугольников: если $a=a_0<a_1<a_2<\dots<a_{n-1}<a_n=b$, и $[a,b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ принимает на (a_{i-1},a_i) постоянное значение $c_i\in\mathbb{R}$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})\cdot c_i$ (разумеется, надо проверять, что это не зависит от выбора точек a_i, таких что $f=\text{const}$ на (a_{i-1},a_i)). Для хорошей функции f, являющейся равномерным пределом последовательности ступенчатых функций φ_n, положим $\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx$ (разумеется, надо проверять, что предел существует и зависит только от f, но не от выбора последовательности $\varphi_n\rightrightarrows f$). При $a>b$ положим $\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} -\int\limits_b^a f(x)\,dx$.

М30◇1°. Докажите следующие свойства интегралов от ступенчатых функций:

а) $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ не зависит от выбора разбиения, на котором φ ступенчата

б) $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx=\int\limits_a^c \varphi(x)\,dx+\int\limits_c^b \varphi(x)\,dx \quad \forall\, c\in[a,b]$

в) если $\forall\, x\in[a,b]\ \ |\varphi(x)|\leqslant\lambda$, где $\lambda\in\mathbb{R}$, то $\left|\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx\right|\leqslant\lambda\,|b-a|$

г) если $\varphi(x)\leqslant\psi(x) \quad \forall\, x\in[a,b]$, то $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx\leqslant\int\limits_a^b \psi(x)\,dx$

д) $\int\limits_a^b\Big(\lambda\varphi(x)+\mu\psi(x)\Big)\,dx=\lambda\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx+\mu\int\limits_a^b \psi(x)\,dx\ \forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$

М30◇2°. Пусть $f(x)$ — хорошая функция. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx$ существует для любой последовательности ступенчатых функций $\varphi_n(x)$, равномерно сходящейся к $f(x)$, и его значение не зависит от выбора последовательности $\varphi_n(x)$.

М30◇3°. Убедитесь, что любая ступенчатая функция хорошая, так что мы имеем два по-разному определённых интеграла от неё. Равны ли эти интегралы?

М30◇4. Какие свойства зад. М30◇1 остаются справедливыми для любых хороших функций?

М30◇5. Пусть $f_n\rightrightarrows f$ на отрезке $[a,b]$, и все f_n — хорошие функции. Верно ли, что

а) f тоже хорошая? **б)** если f хорошая, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx$?

М30◇6. Вычислите: **а)** $\int\limits_0^1 x\,dx$ **б)** $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ **в)** $\int\limits_0^1 x^n\,dx$ **г)** $\int\limits_0^1 e^x\,dx$.

[1] в учебниках анализа такие функции иногда называют *интегрируемыми по Дьедонне*, а интеграл, о котором идёт речь в этом листке, — *интегралом Дьедонне* (чтобы отличать его от других определений: по Риману, по Лебегу и т. п., приводящих к *другим* множествам интегрируемых функций)