Экспонента и логарифм[1]

M27◇1 (экспоненты). Пусть формальный степенной ряд $f = \sum\limits_{k\geqslant 0} a_k x^k$ удовлетворяет соотношению $f' = f$. Выразите все коэффициенты a_k через a_0 и докажите, что полученный ряд абсолютно сходится при всех x.

определение Ряд $e^x \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu\geqslant 0} \frac{x^\nu}{\nu!}$, возникающий в предыдущей задаче при $a_0 = 1$, называется *экспонентой*.

M27◇2. Докажите $\forall\, a, b$ основное экспоненциальное тождество[2]: $e^{a+b} = e^a e^b$.

M27◇3. Для любых положительных ε, $\varrho \in \mathbb{R}$ подберите $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\forall\ k \geqslant n$ неравенство $|1 + x + x^2/2 + \cdots + x^k/k! - e^x| < \varepsilon$ было выполнено *сразу для всех* x с $|x| \leqslant \varrho$.

M27◇4. Вычислите **а)** $\lim\limits_{x\to 0} e^x$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ **в)** $\lim\limits_{n\to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$

M27◇5. Докажите, что функция e^x всюду бесконечно дифференцируема и вычислите $(e^x)'$.

M27◇6. Опишите все дифференцируемые функции на интервале (a, b), удовлетворяющие дифференциальному уравнению[3] $f'(x) = f(x)$ при всех $x \in (a, b)$.

Обозначение. Через $\mathbb{R}^{>0} \subset \mathbb{R}$ мы обозначаем множество всех *положительных* вещественных чисел. Отметим, что оно замкнуто относительно операций умножения и деления.

M27◇7. Докажите, что функция $y = e^x$ является монотонно возрастающей биекцией между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^{>0}$, и постройте её примерный график.

M27◇8*. Любая ли непостоянная непрерывная функция $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{>0}$, удовлетворяющая тождеству $f(a+b) = f(a)f(b)\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$, переводит 0 в 1, всюду дифференцируема и удовлетворяет дифференциальному уравнению $f'(x) = f(x)$? Опишите все такие функции.

M27◇9 (логарифм). Функция $y = \ln x$, обратная к функции $y = e^x$, называется (*натуральным*) *логарифмом*[4]. Докажите, что функция $\mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{x\mapsto \ln x} \mathbb{R}$ является монотонно возрастающей всюду дифференцируемой биекцией и удовлетворяет основному логарифмическому тождеству $\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}^{>0}$. Постройте её примерный график и вычислите $\ln'(x)$.

M27◇10 (логарифмическая производная). Выразите $\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)'$ через f и f' и вычислите производную произведения $(1 + 3\,x^2)^3 \cdot (1 - 5\,x^4)^2 \cdot (21 + 7\,x^5)$.

M27◇11*. Любая ли непостоянная непрерывная функция $\mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, удовлетворяющая тождеству $f(ab) = f(a) + f(b)\ \forall\ a, b \in \mathbb{R}^{>0}$, переводит 1 в 0, взаимно однозначна и всюду дифференцируема? Опишите все такие функции.

M27◇12*. Вычислите $e^{\pi i}$ и $e^{2\pi i}$. Покажите, что функция $\mathbb{C} \xrightarrow{z\mapsto e^z} \mathbb{C}$ является периодической, найдите её период, множество её значений и укажите в $\mathbb{C}$ какую-нибудь область, взаимно однозначно отображаемую на множество значений.

M27◇13* (комплексный логарифм). Пусть $Ln\,(z) \overset{\text{def}}{=} \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,(z)$. Найдите все значения[5]:
а) $Ln\,(-1)$ **б)** $Ln\,(ie)$ **в)** $e^{Ln\,(z)}$, где $z \neq 0$ **г)** $Ln(e^z)$

M27◇14. Найдите радиус сходимости ряда $\ln(1+x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ и докажите, что при вещественных x с $|x| < \varrho$ правая часть абсолютно сходится к $\ln(1+x)$.

M27◇15*. Что происходит при $x = \pm\varrho$?

---

[1] задачи 1 – 5 можно решать в $\mathbb{R}$, в $\mathbb{C}$, или и там и там

[2] ПОДСКАЗКА: проверьте сначала, что это тождество выполнено для формальных степенных рядов от a, b, потом докажите, что все ряды абсолютно сходятся и примените зад. M26◇5

[3] ПОДСКАЗКА: пусть $f' = f$; найдите $(fe^{-x})'$.

[4] иначе говоря, $\ln x$ — это степень, в которую надо возвести число e, чтобы получить x

[5] напомним, что *ориентированный угол* $\mathrm{Arg}\,(z)$ — это *многозначная* функция