Сходимость рядов[1]

Напоминания о сходящихся рядах. Суммой числового ряда $\sum c_\nu$ (вещественного или комплексного) называется предел его *частичных* сумм $\lim\limits_{n\to\infty}(c_0+c_1+\dots+c_n)$. Если он существует, ряд называется *сходящимся*, если нет — *расходящимся*. Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если все конечные суммы вида $|c_i|+|c_{i+1}|+\dots+|c_{i+m}|$ ограничены сверху. Сходящийся ряд, который не является абсолютно сходящимся, называется *условно сходящимся*.

М26◇1. Приведите пример какого-нибудь условно сходящегося ряда. Можно ли перемешать его слагаемые так, чтобы ряд перестал сходится?

М26◇2*. Можно ли перемешать слагаемые произвольного условно сходящегося рада так, чтобы он стал **а)** расходиться **б)** сходиться к любому наперёд заданному числу (в т. ч. $\pm\infty$)?

М26◇3. Докажите, что всякий абсолютно сходящийся ряд сходится, причём его сумма не меняется при перемешивании слагаемых.

М26◇4 (критерий Коши). Докажите, что для абсолютной сходимости ряда $\sum c_\nu$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,n\in\mathbb{N}:\ |c_k|+|c_{k+1}|+\dots+|c_{k+m}|<\varepsilon\ \forall\,k>n$ и $\forall\,m\in\mathbb{N}$.

М26◇5. Докажите, что ряд $\sum a_\nu b_\mu$, составленный из всевозможных попарных произведений (всё равно в каком порядке) членов двух абсолютно сходящихся рядов $\sum a_\nu$ и $\sum b_\mu$ абсолютно сходится к произведению сумм рядов-сомножителей.

М26◇6 (признаки Абеля и Дирихле). Сходится ли ряд $\sum a_n b_n$, если известно, что:
а) $\sum|a_n|$ сходится, а b_n ограничены? **б)** $\sum a_n$ сходится, а b_n ограничены и монотонны?
в) суммы $a_1+\dots+a_n$ ограничены, а b_n монотонно стремятся к нулю при $n\to\infty$?

М26◇7. Пусть ряд $f(x)=\sum a_k x^k$ сходится при $x=x_0$. Верно ли, что он абсолютно сходится при всех x с $|x|<|x_0|$?

М26◇8 (признак Коши). Докажите, что ряд $\sum c_\nu$ абсолютно сходится, если существует вещественное положительное $q<1$, такое что $\sqrt[\nu]{|c_\nu|}\leqslant q$ при всех $\nu\gg 0$.

М26◇9 (признак Даламбера). Докажите, что ряд $\sum c_\nu$ абсолютно сходится, если существует вещественное положительное $q<1$, такое что $|c_{\nu+1}/c_\nu|\leqslant q$ при всех $\nu\gg 0$.

М26◇10. Сходятся ли: **а)** $\sum\limits_{n\geqslant 1}\binom{2n}{n}^{-1}$ **б)** $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ **в)** $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ **г)** $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Радиус сходимости степенного ряда. Число $\varrho\in\mathbb{R}$, обратное к ТВГ множества предельных точек последовательности $\sqrt[n]{|a_n|}$ называется *радиусом сходимости* степенного ряда $\sum a_n x^n$. Если эта ТВГ равна нулю, положим $\varrho=+\infty$. Если последовательность $\sqrt[n]{|a_n|}$ не ограничена сверху, положим $\varrho=0$.

М26◇11. Докажите, что всякий (вещественный или комплексный) степенной ряд $\sum a_n x^n$ абсолютно сходится при любом x с $|x|<\varrho$ и расходится при любом x с $|x|>\varrho$.

М26◇12. Пусть ряд $f(x)=\sum a_n x^n$ имеет ненулевой радиус сходимости ϱ. Зададимся произвольным числом $r\in\mathbb{R}$, таким что $0<r<\varrho$. Верно ли, что $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ m\in\mathbb{N}:\forall\ n>m$ неравенство $|f(x)-a_0-a_1x-\dots-a_nx^n|<\varepsilon$ выполняется сразу для всех[2] x с $|x|<r$.

М26◇13. Сравните радиусы сходимости степенных рядов $f=\sum\limits_{n\geqslant 0}a_n x^n$ и $f'\stackrel{\text{def}}{=}\sum\limits_{n\geqslant 1}n a_n x^{n-1}$.

М26◇14*. Докажите, что сумма степенного ряда с ненулевым радиусом сходимости ϱ является бесконечно дифференцируемой функцией[3] в области $|x|<\varrho$.

М26◇15*. Пусть числа r и R обратны, соответственно, ТВГ и ТНГ предельных точек последовательности $|a_{n+1}/a_n|$. Сходится ли степенной ряд $\sum a_n x^n$ при $|x|<r$ и $|x|>R$? Какие неравенства связывают r, R и радиус сходимости? Бывают ли они строгими?

---

[1] задачи этого листка можно решать в $\mathbb{R}$, в $\mathbb{C}$, или и там и там

[2] это явление называется *равномерной* (по $x:|x|<r$) сходимостью

[3] ПОДСКАЗКА: *равномерно* по x одновременно приблизятся f и f' их частичными суммами, а производную от f (понимаемую как предел отношения приращений) — отношения приращений частичной суммы