Действие $\mathbb{Q}[[\frac{d}{dx}]]$ на $\mathbb{Q}[x]$.

Подстановка $t = \frac{d}{dx}$ в формальный степенной ряд. Для любого ряда $F(t) = \sum\limits_{k\geqslant 0} a_k t^k \in \mathbb{Q}[[t]]$ определим отображение $\mathbb{Q}[x] \xrightarrow{\widetilde{F}} \mathbb{Q}[x]$, которое получается подстановкой в F вместо t оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$. Иначе говоря, $\widetilde{F} = F\left(\frac{d}{dx}\right)$ переводит каждый многочлен $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ в многочлен

$$\widetilde{F}g = F\left(\frac{d}{dx}\right) g \overset{\text{def}}{=} \sum_{k\geqslant 0} a_k \frac{d^k g}{dx^k} = \sum_{k\geqslant 0} a_k g^{(k)} ,$$

где $\frac{d^k g}{dx^k} = g^{(k)}$ — это k-я производная от g и $g^{(0)} \overset{\text{def}}{=} g$. Поскольку для каждого многочлена $g^{(n)} = 0$ при всех $n \gg 0$, сумма справа конечна и $\widetilde{F}g$ тоже является многочленом.

M$26\frac{2}{3}$◇1 (формула Тейлора). Как действуют на $\mathbb{Q}[x]$ операторы $\exp(\frac{d}{dx})$ и $\exp(-\frac{d}{dx})$?

M$26\frac{2}{3}$◇2 (разностные операторы). Покажите, что отображения $f(x) \xmapsto{\nabla} f(x) - f(x-1)$ и $f(x) \xmapsto{\Delta} f(x+1) - f(x)$ получаются из некоторых рядов и найдите эти ряды явно.

M$26\frac{2}{3}$◇3. Проверьте, что отображение $\mathbb{Q}[x] \xrightarrow{\widetilde{F}} \mathbb{Q}[x]$ *линейно*, т. е. $\forall\, f, g \in \mathbb{Q}[x]$ и $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ выполняется соотношение $\widetilde{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \widetilde{F} g + \mu \widetilde{F} f$, а также что $\lambda \widetilde{F + \mu G} = \lambda \widetilde{F} + \mu \widetilde{G}$.

M$26\frac{2}{3}$◇4. Убедитесь, что действие $\widetilde{F}$ однозначно определяется заданием последовательности *многочленов Аппеля*: $F_n(x) \overset{\text{def}}{=} \widetilde{F} x^n$. А именно, выразите коэффициенты $F_n(x)$ через коэффициеты $F(t)$ и, наоборот, восстановите F по F_n.

M$26\frac{2}{3}$◇5. Пусть $F(t)G(t) = 1$ в $\mathbb{Q}[[t]]$. Что можно сказать про отображения $\widetilde{F}$ и $\widetilde{G}$?

M$26\frac{2}{3}$◇6. Постройте последовательность многочленов $c_n(x)$, в которой $c_0(x) = 1$, и при $n \geqslant 1$ все $c_n(x)$ не имеют свободного члена и удовлетворяют соотношению $\nabla c_n = c_{n-1}$.

M$26\frac{2}{3}$◇7 (суммирование степеней). Покажите, что при фиксированном целом неотрицательном m сумма $s_m(n) = 1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m$ является многочленом от n, вычислите $\Delta s_m(x)$ и найдите в $\mathbb{Q}[[t]]$ ряд, для которого $s'_m(x)$ является n-тым многочленом Аппеля (см. зад. M$26\frac{2}{3}$◇4).

Ряд Тодда и многочлены Бернулли. Ряд $B(t) = \sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{b_k}{k!} t^k \overset{\text{def}}{=} \frac{t}{e^t - 1}$ называется *рядом Тодда*. Входящие в его коэффициенты числа b_k называются *числами Бернулли*, а его многочлены Аппеля (см. зад. M$26\frac{2}{3}$◇4) $B_n(x) = \widetilde{B} x^n$ называются *многочленами Бернулли*.

M$26\frac{2}{3}$◇8. Выразите **а)** b_n через $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ **б)** B_n через $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$

M$26\frac{2}{3}$◇9. Выразите коэффициенты многочлена $s_m(x)$ из зад. M$26\frac{2}{3}$◇7 через числа Бернулли.

M$26\frac{2}{3}$◇10. Найдите «нечётную составляющую» $B(t) - B(-t)$ и все числа b_{2k+1}.

M$26\frac{2}{3}$◇11*. Вычислите первые 11 чисел и многочленов Бернулли и сумму 10-х степеней первых 1000 натуральных чисел[1].

M$26\frac{2}{3}$◇12 (целозначные многочлены). Многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами называется *целозначным*, если $f(z) \in \mathbb{Z} \quad \forall\, z \in \mathbb{Z}$. Бывают ли целозначные многочлены с нецелыми коэффициентами? Укажите какой-нибудь набор из $(n+1)$ целозначных многочленов $f_0, f_1, \ldots, f_n$, такой что любой целозначный многочлен f степени $\leqslant n$ единственным образом записывается в виде $f = m_0 f_0 + m_1 f_1 + \cdots + m_n f_n$ с $m_i \in \mathbb{Z}$. Существуют ли такие наборы с $\deg f_i = i\ \forall i$ и с $\deg f_i = n\ \forall i$?

[1] напомню, что у Якоба Бернулли, по его собственному признанию, на это ушло «меньше половины четверти часа»