Исчисление формальных рядов

Обозначение: через $U \subset \mathbb{F}[[t]]$ и $N \subset \mathbb{F}[[t]]$ мы обозначаем множества всех рядов, соответственно, с единичным свободным членом и с нулевым свободным членом. Отметим, что U замкнуто относительно операций умножения и деления, а N — относительно сложения и вычитания. Кроме того, по зад. М$25\frac{1}{2}\diamond 5$ для любого $f \in U$ корректно определён ряд $\ln f \in N$.

М$26\frac{1}{2}\diamond$1 (логарифмическая производная). Равносильны ли друг другу такие равенства на ряды $f, g \in U$: **а)** $f = g$ **б)** $f' = g'$ **в)** $f'/f = g'/g$ **г)** $(\ln f)' = (\ln g)'$ **д)** $\ln f = \ln g$. Задаёт ли отображение $f \longmapsto \Big(\ln(f)\Big)'$ биекцию между U и $\mathbb{F}[[t]]$?

М$26\frac{1}{2}\diamond$2 (экспонента). Покажите, что существует ровно один ряд $\exp(t) \in U$ с $\exp' = \exp$, вычислите все его коэффициенты, убедитесь, что $\exp(h(t))$ определена для любого ряда $h(t) \in N$ и вычислите $\exp(\ln(1+t))$.

М$26\frac{1}{2}\diamond$3. Докажите, что экспоненцирование и логарифмирование $N \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} U$ являются взаимно обратными биекциями, переводящие операцию сложения рядов в N в операцию умножения рядов в U, т. е. $\exp(h_1 + h_2) = \exp(h_1)\exp(h_2)$ и $\ln(f_1 f_2) = \ln(f_1) + \ln(f_2)$ $\forall\ h_1, h_2 \in N$ и $\forall\ f_1, f_2 \in U$.

М$26\frac{1}{2}\diamond$4 (бином Ньютона). Для любого $\alpha \in \mathbb{F}$ ряд $(1+t)^\alpha \overset{\text{def}}{=} \exp\big(\alpha\ln(1+t)\big)$ называется *биномом* с показателем α. Вычислите явно все коэффициенты бинома и разверните в формальные степенные ряды $\sqrt[3]{1+2t}$ и $1/\sqrt{1-3t}$.

М$26\frac{1}{2}\diamond$5. Убедитесь, что ряд f^α определен для любых $f \in U$, $\alpha \in \mathbb{F}$ и лежит в U. Верно ли, что: **а)** $f^{\alpha_1} f^{\alpha_2} = f^{\alpha_1+\alpha_2}$ **б)** $(f^{\alpha_1})^{\alpha_2} = f^{\alpha_1\alpha_2}$ **в)** ряд f^{-1} обратен ряду f?

М$26\frac{1}{2}\diamond$6. Выразите $(f^\alpha)'$ через α, f и f'.

Метод производящих функций. Для изучения последовательности $(a_n) \subset \mathbb{F}$ часто бывает удобно сопоставить ей *производящую функцию* $A(t) = \sum a_n t^n \in \mathbb{F}[[t]]$ и переформулировать свойства этой последовательности в виде соотношений на $A(t)$ в $\mathbb{F}[[t]]$ — например, алгебраических, дифференциальных, и т. п. уравнений на $A(t)$. Эти соотношения можно исследовать при помощи исчисления формальных степенных рядов (например, явно найти $A(t)$ из соответствующего уравнения).

М$26\frac{1}{2}\diamond$7* (числа Каталана). На практике при вычислении суммы $a_1 \overbrace{+ a_2 + \cdots +}^{n \text{ плюсов}} a_{n+1}$ в ней расставляются скобки, фиксирующие конкретный порядок выполнения сложений (по одному в каждый момент времени). Количество всевозможных таких расстановок называется *n-тым числом Каталана c_n*. По определению, $c_0 = 1$. Напишите рекуррентную формулу, выражающую c_n через $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, проинтерпретируйте её как квадратное уравнение на ряд $c(t) = \sum c_\nu t^\nu$, решите его в $\mathbb{Q}[[t]]$ и получите явное выражение чисел Каталана через подходящие числа сочетаний. Кстати, всегда ли C_{2n}^n делится на $(n+1)$?

М$26\frac{1}{2}\diamond$8*. Сколькими способами можно разрезать выпуклый n-угольник на треугольники по нигде кроме вершин не пересекающимся диагоналям?

М$26\frac{1}{2}\diamond$9. Пусть последовательность $(y_n) \subset \mathbb{C}$ удовлетворяет рекуррентному уравнению k-того порядка[1] $y_n = a_1 y_{n-1} + \cdots + a_k y_{n-k}$ и при $0 \leqslant \nu \leqslant (k-1)$ имеет заданные начальные значения $y_\nu = c_\nu \in \mathbb{C}$. Положим $Y(t) = \sum\limits_{\nu \geqslant 0} y_\nu t^\nu \in \mathbb{C}[[t]]$, $A(t) = 1 - a_1 t - \cdots - a_k t^{n-k} \in \mathbb{C}[t]$, $B(t) = Y(t) \cdot A(t)$. Выразите коэффициенты ряда $B(t)$ через a_ν и c_ν. Является ли он многочленом?

М$26\frac{1}{2}\diamond$10. Пользуясь предыдущей задачей, найдите $Y(t)$ и «формулу n-того члена» для последовательностей: **а)** $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$ с $y_0 = 0$, $y_1 = 1$; **б)** $y_n = 4\,(y_{n-1} - y_{n-2})$ с $y_0 = 3$, $y_1 = 1$.

[1] $k \in \mathbb{N}$ и $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ даны и фиксированы, причём $a_k \neq 0$