Формальные степенные ряды

Определения. Бесконечное выражение $a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$, где a_i — числа из некоторого числового поля[1] $\mathbb{F}$, а t — переменная, называется *формальным степенным рядом*. По определению, два ряда *равны*, если равны все их соответственные коэффициенты. Совокупность всех формальных степенных рядов с коэффициентами из $\mathbb{F}$ обозначается $\mathbb{F}[[t]]$. Ряд с конечным числом ненулевых коэффициентов называется *многочленом*. Совокупность всех многочленов обозначается $\mathbb{F}[t] \subset \mathbb{F}[[t]]$. Операция, сопоставляющая рядам $f_1, f_2, \ldots, f_n$ новый ряд g, называется *алгебраической*, если каждый коэффициент ряда g вычисляется конечным числом арифметических действий над конечным числом коэффициентов рядов $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Например, сложение и умножение рядов — алгебраические операции, а вычисление значения ряда при данном числовом значении t — нет.

M25$\frac{1}{2}$◇1°. Напишите явное выражение коэффициента при t^n у суммы и у произведения двух рядов через коэффициенты самих этих рядов.

M25$\frac{1}{2}$◇2°. Для любого конечного множества M положим $C_M(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k \geqslant 0} c_k t^k$, где c_k — это число всех k-элементных подмножеств в M. Для двух непересекающихся конечных множеств A и B выразите $C_{A \cup B}(t)$ и[2] $C_{A \times B}(t)$ через $C_A(t)$ и $C_B(t)$.

M25$\frac{1}{2}$◇3 (деление). Ряд $a(t)$ называется *обратимым*, если существует ряд $a^{-1}(t)$, такой что $a(t)a^{-1}(t) = 1$. Докажите, что $a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ обратим тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$, причём $a^{-1}(t)$ единственен, и его отыскание по a является алгебраической операцией.

M25$\frac{1}{2}$◇4. Найдите n-тый коэффициент ряда: **а)** $(1-t)^{-1}$ **б)** $\big((1-t)^2\big)^{-1}$ **в)** $\big((1-t)^m\big)^{-1}$ **г)** $\big((t-1)(t+2)(t-3)\big)^{-1}$ **д)** $\big((t+1)^2(t-2)(t+3)^3\big)^{-1}$ **е)** $\big(t^2+t-1\big)^{-1}$ **ж)** $\big(t^2+t+1\big)^{-1}$.

M25$\frac{1}{2}$◇5° (замена переменного). Является ли формальной алгебраической операцией подстановка вместо t произвольного ряда с нулевым свободным членом?

M25$\frac{1}{2}$◇6 (формула Тейлора). Подставим $t + \vartheta$ вместо t в ряд $f(t) \in \mathbb{F}[[t]]$ и сгруппируем результат по степеням ϑ, т. е. запишем его как $f(t+\vartheta) = \sum\limits_{k \geqslant 0} \dfrac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(t) \cdot \vartheta^k$. Выразите все коэффициенты каждого из рядов $f^{(k)}(t)$ через коэффициенты исходного ряда f.

Производные и первообразные. Ряд $f^{(1)}(t)$ из зад. M25$\frac{1}{2}$◇6 называется *производной* ряда f и обозначается f' или $\frac{d}{dt}f$. Ряд $F(t)$ *с нулевым свободным членом*, такой что $F'(t) = f(t)$, называется *первообразной* ряда $f(t)$; сокращённое обозначение: $F(t) = \int f(t)\,dt$.

M25$\frac{1}{2}$◇7°. Выразите коэффициенты первообразной ряда f через коэффициенты f.

M25$\frac{1}{2}$◇8°. Покажите, что для любого ряда $f(t) \in \mathbb{F}[[t]]$ ряд $f(t_1) - f(t_2) \in \mathbb{F}[[t_1, t_2]]$ делится в $\mathbb{F}[[t_1, t_2]]$ на $(t_1 - t_2)$. Что получится, если в частном положить $t_1 = t_2 = t$?

M25$\frac{1}{2}$◇9°. Верно ли, что в зад. M25$\frac{1}{2}$◇6 $f^{(k)} = \Big(f^{(k-1)}\Big)' = \frac{d^k}{dt^k} f$ (т. е. k раз применили $\frac{d}{dt}$ к f)?

M25$\frac{1}{2}$◇10. Пусть $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ и $g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$. Выразите через f, g, f' и g' производные: **а)** $(f \pm g)'$ **б)** $\big(\alpha f(t)\big)'$, где $\alpha = \text{const}$ **в)** $\big(t^m f(t)\big)'$ **г)** $(f \cdot g)'$ **д)** $(f/g)'$, при $b_0 \neq 0$ **е)** $\big(f(\alpha t)\big)'$, где $\alpha = \text{const}$ **ж)** $\Big(f\big(t^m\big)\Big)'$ **з)** $\Big(f\big(g(t)\big)\Big)'$, при $b_0 = 0$.

M25$\frac{1}{2}$◇11. Вычислите m-тую производную от $(1-t)^{-1}$ и сопоставьте это с зад. M25$\frac{1}{2}$◇4.

M25$\frac{1}{2}$◇12. Найдите ряд $(1-t)^{-m}$ для произвольного $m \in \mathbb{N}$.

M25$\frac{1}{2}$◇13 (логарифм). Ряд $\ln(1+t) \stackrel{\text{def}}{=} \int \dfrac{dt}{1+t}$ называется *логарифмом* ряда $(1+t)$. Вычислите явно все его коэффициенты.

---

[1] мы будем рассматривать $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

[2] *произведение* $A \times B$ множеств A и B представляет собой множество всех пар (a, b) с $a \in A$, $b \in B$