Получение оценок

МатАн есть искусство получения точных результатов посредством грубых, приближённых оценок
(из профессорско-преподавательского фолькльора)

М15◇1 (неравенство Бернулли). Верно ли, что $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\,\alpha \quad \forall n\in\mathbb{N}$ и произвольного действительного $\alpha > -1$?

М15◇2. Укажите какое-нибудь[1] $m\in\mathbb{N}$, чтобы при всех целых $n \geqslant m$ выполнялась оценка:

а) $1000\cdot 2^n < n!$; **б)** $100\cdot n^2 < 2^n$; **в)** $10\cdot n^3 < 2^n$; **г)** $n^{10} < 2^n$; **д)** $(1+10^{-2005})^n > 10^{2006}$; **е)** $(1-10^{-2006})^n < 10^{-2007}$; **ж)** $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+n} > \frac{1}{2}$.

Оценки функций. Функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, заданная на некотором множестве X, называется *ограниченной сверху* (соотв. *ограниченной снизу* и просто *ограниченной*) на X, если таковым является множество её значений $f(X)\subset\mathbb{R}$. Иначе говоря, f ограничена сверху, если $\exists\, c\in\mathbb{R}:\ \forall x\in X\ f(x) < c$; f ограничена снизу, если $\exists\, c\in\mathbb{R}:\ \forall x\in X\ f(x) > c$; f ограничена, если $\exists\, c_1, c_2\in\mathbb{R}:\ \forall x\in X\ c_1 < f(x) < c_2$.

М15◇3. Исследуйте каждую из функций: $x^3-10\,x$, $\quad y=\frac{x^3-x+1}{x^4+1}$ $\quad y=\frac{x^4-x+1}{x^4+1}$ $\quad y=\frac{x^5-x+1}{x^4+1}$ на ограниченность **а)** на отрезке $[-100, 100]$; **б)** на всей прямой.

М15◇4. Какие из перечисленных ниже функций ограничены на своей области определения и с какой стороны: **а)** $y=\sqrt{x^2+1}-x$; **б)** $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$; **в)** $y=\frac{5\,x}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}$; **г)** $y=\frac{3+2x}{3x-2}$.

М15◇5. Ограничены ли сверху последовательности: **а)** $a_n=\binom{100}{n}\cdot n^{-100}$ **б)** $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$?

Оценки рядов. Бесконечные суммы типа $\sum\limits_{\nu\geqslant 1} a_\nu = a_1+a_2+a_3+\cdots$ называются *рядами*. Конечная сумма первых m членов такого ряда $s_m = a_1+a_2+\cdots+a_m$ называется его *частичной суммой*. Ряд *неотрицательных* действительных чисел называется *сходящимся*, если множество значений его частичных сумм ограничено сверху; твг этого множества называется *суммой* ряда. Если частичные суммы не ограничены, то говорят, что ряд *расходится*.

М15◇6. Докажите, что ряды сходятся и найдите их суммы: **а)** $\sum\limits_{n\geqslant 1} q^n$ (с $0<q<1$) **б)** $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{n+1}{2^n}$ **в)** $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{2n-1}{2^n}$ **г)** $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$ **д)** $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ **е)** $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ **ж)** $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$

М15◇7 (число e). Докажите, что число $e \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}\cdots$

а) существует; **б)** удовлетворяет неравенствам $2{,}7 < e < 2{,}8$; **в*)** иррационально.

М15◇8 (гармонический ряд). Сходится ли ряд: $\sum\limits_{k\geqslant 1}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$?

М15◇9. Сходиться ли ряд, составленный из квадратов членов гармонического ряда?

М15◇10*. Из гармонического ряда выкинули все слагаемые, в десятичной записи которых участвует цифра 9. Могут ли частичные суммы остальных слагаемых превысить 100?

М15◇11* (задача о полоскании белья). Имеется 10 *кг* грязного белья и 10 *кг* чистой воды. При погружении любой части белья в любое количество воды грязь распределяется в их общей массе равномерно. Можно ли уменьшить количество грязи в белье более, чем

а) в 2 раза? **б)** в 3 раза? **в)** в 179 раз?

Окрестности. Для любого вещественного $\varepsilon > 0$ под ε-окрестностью точки $x_0\in\mathbb{R}$ понимается открытый интервал $D_\varepsilon(x_0) \overset{\text{def}}{=} (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) = \{\,x\in\mathbb{R} : |x-x_0| < \varepsilon\,\} = \{\,x\in\mathbb{R} : x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon\,\}$.

М15◇12. Верно ли, что любая ε-окрестность любого числа содержит бесконечно много рациональных чисел?

М15◇13. Можно ли покрыть множество $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ системой интервалов, суммарная длина которых меньше любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$?

[1] подчеркнём, что «какое-нибудь» вовсе не означает «как можно меньшее»

Окрестности, покрытия и предельные точки

М$15\frac{1}{2}$◇1 (лемма о вложенных отрезках). Имеется последовательность отрезков, каждый из которых содержится в предыдущем. Может ли пересечение всех этих отрезков быть пустым?

М$15\frac{1}{2}$◇2. Изменится ли ответ, если отрезки заменить интервалами?

М$15\frac{1}{2}$◇3. Улитка в течение 6 часов (неравномерно) ползла по прямой, находясь под непрерывным наблюдением группы естествоиспытателей. Каждый из них следил за улиткой ровно 1 час без перерывов и зафиксировал, что за этот час она переместилась ровно на 1 *м*. Могла ли улитка за всё время эксперимента переместиться **а)** на 5 *м*? **б)** на 10 *м*? **в)** на 12 *м*?

М$15\frac{1}{2}$◇4. Отрезок S покрыт интервалами. Всегда ли возможно удалить часть из них так, чтобы остальные тоже покрывали S и

а) (лемма о конечном покрытии) их было бы конечное число?

б) каждая точка $x \in S$ накрывалась бы не более, чем двумя интервалами?

М$15\frac{1}{2}$◇5. Отрезок S длины ℓ покрыт **а)** конечным **б)** любым набором отрезков, содержащихся в S. Всегда ли возможно выкинуть часть из них так, чтобы остальные тоже покрывали S и имели суммарную длину $\leqslant 2\ell$?

М$15\frac{1}{2}$◇6. Что изменится, если в предыдущих двух задачах заменить отрезок на интервал?

Внутренние точки и открытые множества. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *внутренней точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если у неё есть ε-окрестность, целиком содержащаяся в M. Множество называется *открытым*, если все его точки — внутренние. Иначе говоря, $U \subset \mathbb{R}$ открыто, если $\forall u \in U \ \ \exists \varepsilon > 0 : D_\varepsilon(u) \subset U$ (величина ε может зависеть от точки u). Пустое множество тоже, по определению, считается открытым.

М$15\frac{1}{2}$◇7°. Убедитесь, что промежутки $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ и (a, b) открыты. Можно ли разбить интервал в объединение двух непересекающихся открытых множеств?

М$15\frac{1}{2}$◇8. Верно ли, что объединение любого набора открытых множеств открыто?

М$15\frac{1}{2}$◇9. Всякое ли пересечение **а)** конечного **б)** любого набора открытых множеств открыто?

М$15\frac{1}{2}$◇10. Всякое ли открытое множество на прямой является объединением конечного или счётного набора *попарно непересекающихся* интервалов, в числе которых допускаются и неограниченные интервалы вида $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$?

Изолированные точки и дискретные множества. Точка $a \in M$ называется *изолированной точкой* множества M, если некоторая её ε-окрестность не содержит никаких других точек из M. Множество, все точки которого изолированы, называется *дискретным*.

М$15\frac{1}{2}$◇11. Бывают ли бесконечные дискретные **а)** ограниченные **б)** несчётные множества?

М$15\frac{1}{2}$◇12*. Постройте открытое $U \subset [\,0\,,\,1\,]$ **а)** длины $\leqslant \frac{1}{2}$ **б*)** сколь угодно малой длины, такое чтобы у дополнения $[\,0\,,\,1\,] \smallsetminus U$ не было бы ни внутренних, ни изолированных точек.

Предельные точки. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если *любая* её ε-окрестность $D_\varepsilon(x_0)$ содержит какую-нибудь точку $x \in M$, отличную от x_0.

М$15\frac{1}{2}$◇13°. Может ли дискретное множество M иметь предельную точку, и если да, то может ли такая точка принадлежать M?

М$15\frac{1}{2}$◇14°. Постройте бесконечное множество $M \subset \mathbb{R}$, множество предельных точек которого: **а)** пусто; **б)** состоит из одной точки; **в)** состоит из двух точек; **г)** совпадает с $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

М$15\frac{1}{2}$◇15. Всякая ли предельная точка множества предельных точек множества M является предельной для самого множества M?

М$15\frac{1}{2}$◇16. Может ли бесконечное ограниченное множество не иметь предельных точек?

Замкнутые, компактные, несчётные и континуальные множества.

Замкнутые множества. Множество $Z \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки[1]. Непустые ограниченные замкнутые множества называются *компактами*.

M$15\frac{2}{3}$◇1°. Замкнуты ли множества **а)** $[\,0\,,\,1\,]$ **б)** $[\,0\,,\,1\,)$ **в)** $[\,0\,,\,\infty\,)$ **г)** $(\,0\,,\,\infty\,)$ **д)** $\mathbb{R}$.

M$15\frac{2}{3}$◇2. Перечислите все одновременно открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{R}$.

M$15\frac{2}{3}$◇3. Равносильна ли замкнутость множества $Z \subset \mathbb{R}$ открытости его дополнения $\mathbb{R} \setminus Z$?

M$15\frac{2}{3}$◇4. Бывают ли дискретные **а)** незамкнутые множества? **б)** бесконечные компакты?

M$15\frac{2}{3}$◇5. Можно ли представить отрезок в виде объединения двух его непересекающихся непустых замкнутых подмножеств?

M$15\frac{2}{3}$◇6. Замкнуто ли пересечение любого набора замкнутых множеств?

M$15\frac{2}{3}$◇7. Замкнуто ли объединение **а)** конечного **б)** любого набора замкнутых множеств?

M$15\frac{2}{3}$◇8 (лемма о вложенных компактах). Докажите, что любая последовательность вложенных компактов $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$ имеет непустое пересечение: $\bigcap K_\nu \neq \varnothing$.

M$15\frac{2}{3}$◇9* (лемма о конечном покрытии). Докажите, что $K \subset \mathbb{R}$ компакт тогда и только тогда, когда любое его покрытие интервалами содержит конечное подпокрытие.

Канторово множество. Определим по индукции последовательность вложенных компактов $K_\nu \subset [0,1]$, в которой $K_0 = [0,1]$, а $K_{\nu+1} \subset K_\nu$ (для всех $\nu \geqslant 0$) является объединением 2^ν отрезков и получается из K_ν выкидыванием открытой средней трети из каждого отрезка, входящего в K_ν. Пересечение $\mathfrak{K} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\limits_\nu K_\nu$ называется *канторовым множеством*. Иначе $\mathfrak{K} \subset [0,1]$ можно описать как множество всех чисел $\varkappa \in [0,1]$, которые можно записать троичной дробью, не содержащей 1 (не обязательно стандартной).

M$15\frac{2}{3}$◇10. Есть ли у $\mathfrak{K}$ **а)** изолированные **б)** внутренние точки?

M$15\frac{2}{3}$◇11. Есть ли у $\mathfrak{K}$ конечное покрытие интервалами сколь угодно малой суммарной длины?

Несчётность и континуальность. Множество называется *несчётным*, если оно бесконечно и не счётно. Про множество, равномощное единичному отрезку говорят, что оно имеет *мощность континуума*.

M$15\frac{2}{3}$◇12. Всегда ли $N \setminus M$ равномощно N, если M счётно, а N несчётно?

M$15\frac{2}{3}$◇13. Можно ли нарисовать несчётное множество попарно непересекающихся
а) интервалов на прямой? **б*)** восьмёрок[2] на плоскости? **в*)** букв Т на плоскости?

M$15\frac{2}{3}$◇14. Имеют ли мощность континуума: **а)** множество бесконечных слов из букв а и б; **б)** любой отрезок; **в)** любой интервал; **г)** $\mathbb{R}$; **д)** $\mathfrak{K}$; **е)** любой квадрат; **ж)** любой куб; **з)** множество бесконечных последовательностей вещественных чисел?

M$15\frac{2}{3}$◇15. Континуальна ли мощность **а)** иррациональных[3] **б)** трансцендентных[4] чисел?

Конденсация несчётных множеств. Элемент $a \in M$ произвольного несчётного множества $M \subset \mathbb{R}$ называется его *точкой конденсации*, если $D_\varepsilon(a) \cap M$ несчётно $\forall\, \varepsilon > 0$.

M$15\frac{2}{3}$◇16*. Может ли множество точек $b \in M$, не являющихся точками конденсации M, быть несчётно?

M$15\frac{2}{3}$◇17*. Может ли множество точек конденсации иметь изолированные точки?

M$15\frac{2}{3}$◇18*. Верно ли, что множество точек конденсации всегда замкнуто?

M$15\frac{2}{3}$◇19* (континуум-гипотеза для замкнутых множеств). Докажите, что любое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$ или пусто, или конечно, или счётно, или имеет мощность континуума.

---

[1] в частности, если их у него вообще нет

[2] *восьмёркой* называется любая пара соприкасающихся внешним образом окружностей

[3] число $r \in \mathbb{R}$ называется *рациональным*, если $\exists\ k \in \mathbb{N} : kr \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$; числа не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*

[4] число называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами; числа, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*

Последовательности

Последовательность элементов множества X — это отображение $\mathbb{N} \xrightarrow{x} X$. Вместо $x(n)$ обычно пишут x_n и называют его *n-тым членом* последовательности. Последовательность x_1, x_2, x_3, … коротко обозначается через (x_n). Отметим, что *последовательность* не следует путать с *множеством* её значений, и неверно думать о последовательности как о «занумерованном множестве». Всюду в этом листке речь будет идти о *числовых* последовательностях, т. е. о последовательностях $\mathbb{N} \xrightarrow{x} \mathbb{R}$.

М16◇1°. Дайте определения числовых последовательностей: **а)** ограниченной; **б)** неограниченной; **в)** монотонно возрастающей; **г)** монотонно невозрастающей.

М16◇2. Изобразите последовательности и исследуйте их на ограниченность и монотонность:
а) $x_n = 1$; **б)** $x_n = n$; **в)** $x_n = (-1)^n/n$; **г)** $0,\ 1/2,\ 0,\ 1/3,\ 0,\ 1/4,\ \ldots$; **д)** $x_n = (n-3)/(2n+5)$; **е)** $x_n = (n^2+1)/(2n+1)$; **ж)** $x_n = (n+1)/(2n^2-1)$.

М16◇3. Дайте определение *подпоследовательности* последовательности x_1, x_2, x_3, … .

Пределы. Число p называется *пределом* последовательности (x_n), если любая его ε-окрестность $D_\varepsilon(p)$ содержит все члены этой последовательности, кроме конечного числа; более формально это записывается так: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \quad |x_n - p| < \varepsilon$. Обозначение: $p = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \to p$ при $n \to \infty$. Последовательность, у которой есть предел, называется *сходящейся*, а у которой нет — *расходящейся*.

М16◇4°. Без отрицаний скажите, что значит, что $q \in \mathbb{R}$ не есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и что значит, что (x_n) расходится. Бывают ли неограниченные сходящиеся последовательности?

М16◇5°. Может ли последовательность не иметь ни одного или иметь несколько пределов?

М16◇6. Выясните, какие из последовательностей сходятся и для сходящихся найдите предел и явно укажите для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ какой-либо номер N, после которого все x_n заведомо лежат в ε-окрестности предела **а)** $1/2,\ -1,\ 1/4, ; -1/3,\ 1/8,\ -1/5,\ \ldots$; **б)** $1/n$; **в)** $(-1)^n$; **г)** $2^n/n!$; **д)** $((-1)^n \cos n)/n^2$; **е)** $n/(n^2+1)$; **ж)** q^n, $q \in \mathbb{R}$; **з)** $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, $q \in \mathbb{R}$; **и)** $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; **к)** $\sqrt{n^2+n} - n$;; **л)** $(n^a)/(b^n)$; **м*)** $\sqrt[n]{n}$.

М16◇7*. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + 1/n\right)^n = e$ (число e определялось в зад. М15◇7).

М16◇8°. Дайте определение тому, что при $n \to \infty$ **а)** $a_n \to +\infty$, **б)** $a_n \to -\infty$, **в)** $a_n \to \infty$. Верно ли, что $(a_n) \to \infty \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-1} = 0$?

М16◇9. Можно что-либо утверждать о сходимости последовательностей: $a_n \pm b_n$; $a_n \cdot b_n$ b_n/a_n; a_n/b_n (у двух последних предполагается, что $a_n, b_n \neq 0\ \forall\ n \gg 0$), если известно, что последовательность b_n ограничена, а a_n стремится **а)** к 0 **б)** к ∞?

Предельные точки. Число p называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если любая его ε-окрестность $D_\varepsilon(p)$ содержит бесконечно много членов этой последовательности; иначе это записывается так: $\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant N : |x_n - p| < \varepsilon$.

М16◇10°. Убедитесь, что эти два определения действительно эквивалентны. Обязана ли предельная точка быть пределом? А предел — предельной точкой?

М16◇11. Может ли множеством всех предельных точек последовательности быть:
а) $\varnothing$? **б)** n различных точек ($n = 1, 2, \ldots$)? **в)** $\mathbb{Z}$? **г)** $\mathbb{Q}$? **д)** $\mathbb{R}$?

М16◇12. У последовательности (a_n) нет предельных точек. Верно ли, что $a_n \to \infty$?

М16◇13. Обязана ли сходиться **а)** произвольная **б)** ограниченная последовательность, у которой есть ровно одна предельная точка?

М16◇14. Известно, что слева или справа от любого $x \in \mathbb{R}$ лежит лишь конечное число членов последовательности (a_n). Верно ли, что (a_n) либо сходится либо стремится к $\pm\infty$?

Пределы последовательностей

М17◇1 (теоремы Больцано–Вейерштрасса). Любая ли ограниченная последовательность:
а) имеет предельную точку? **б)** содержит подпоследовательность, имеющую предел?
в) если монотонно неубывает (или монотонно невозрастает), то имеет предел?

М17◇2. Пусть (a_n) и (b_n) имеют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$. Докажите, что
а) $a_n \pm b_n$, **б)** $a_n \cdot b_n$, **в)** $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$, а если $\beta \neq 0$, то и **г)** $1/b_n$, **д)** a_n/b_n тоже сходятся, и выразите их пределы через α и β.

М17◇3. Вычислите пределы (при $n \to \infty$) или докажите расходимость последовательностей:
а) $(3n^3 - 5n + 7)/(5n^3 + 7n^2 - 11)$; **б)** $\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2-5n}$; **в)** $\sqrt{n^2+2n^3} - \sqrt{2n^2+n^3}$;
г) $\sqrt[n]{n!}$; **д*)** $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$; **е*)** $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ радикалов}}$; **ж*)** $(1-1/n)^n$; **з*)** $(1+3/n)^n$.

М17◇4. Будем называть *перемешиванием* последовательности $\mathbb{N} \xrightarrow{a} \mathbb{R}$ её композицию с произвольным взаимно однозначным отображением $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Влияет ли перемешивание на сходимость/расходимость и значение предела (в том числе, когда $a_n \to \pm\infty, \infty$)?

М17◇5 (критерий Коши). Последовательность a_n называется *последовательностью Коши*, если $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon\ \forall\, n_1, n_2 > N$. Докажите, что последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши.

Пополнение по Коши. Две последовательности Коши (a_n) и (b_n) называются *эквивалентными*, если любое перемешивание последовательности $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ тоже является последовательностью Коши. Действительным числом Коши называется класс эквивалентных рациональных последовательностей Коши $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$. Множество всех таких классов обозначается $\overline{\mathbb{Q}}$ и называется *пополнением* $\mathbb{Q}$.

М17◇6*. Не прибегая к языку БДД, дайте определение суммы, произведения и отношения «$<$» на множестве $\overline{\mathbb{Q}}$, после чего **а)** докажите теорему о полноте множества $\overline{\mathbb{Q}}$,
б) постойте сохраняющий арифметические операции и порядок изоморфизм $\overline{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$.

Абсолютная и условная сходимость рядов. Ряд $\sum\limits_{i\geqslant 1} a_i$ произвольных чисел $a_i \in \mathbb{R}$ называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ имеет конечный предел (он называется *суммой ряда*). Сходящийся ряд называется *абсолютно сходящимся*, если его ряд абсолютных величин $\sum\limits_{i\geqslant 1} |a_i|$ тоже сходится; в противном случае ряд называют *условно сходящимся*.

М17◇7. Убедитесь, что для ряда неотрицательных чисел новое определение сходимости, данное в этом листке, согласуется с определением из позапрошлого листка.

М17◇8. Чему равен $\lim\limits_{i\to\infty} a_i$, если ряд $\sum\limits_{i\geqslant 0} a_i$ сходится?

М17◇9. Сходится ли ряд $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$ **а)** абсолютно? **б)** условно?

М17◇10 (критерий Коши). Докажите, что ряд $\sum\limits_{i\geqslant 1} a_i$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall\,\varepsilon > 0\quad \exists\, N\in\mathbb{N} : |a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}| < \varepsilon$ для всех номеров $n_2 > n_1 > N$.

М17◇11*. Докажите, что при помощи подходящего перемешивания слагаемых условно сходящегося ряда его сумму можно сделать равной любому наперёд заданному числу, а также сделать ряд расходящимся.

М17◇12. Можно ли перемешать слагаемые ряда $1-1+1-1+\cdots$ так, чтоб он стал сходиться?

М17◇13. Изменяется ли сумма абсолютно сходящегося ряда при перемешивании слагаемых?

Графики и кривые

М18◇1. Функция $y = f(x)$ имеет график, изображённый на рис. 18 - 1. Нарисуйте (поточнее) графики функций: **а)** $2\,f(x)$; **б)** $f(2x)$; **в)** $f(x+2)$;
г) $f(x)+2$; **д)** $f(-x)$; **е)** $f(|x|)$; **ж)** $-|f(-|x|)|$;
з) $3-f(x)$; **и)** $3\,f(x)+2$; **к)** $f\left({(x-3)}/{2}\right)$;
л) $f\left(({x}/{2})-3\right)$; **м)** $3-2f(3-2x)$; **н)** $f\left({1}/{x}\right)$.
о) $x\,f(x)$; **п)** ${1}/{f(x)}$; **р)** $1-\left|f\left({(1-|x|)}/{3}\right)\right|$;

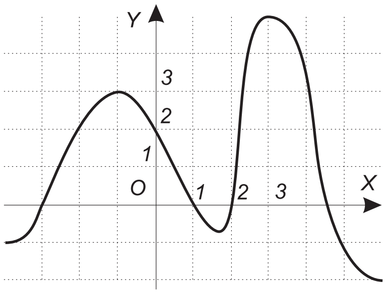

Рис. 18 - 1. График $y = f(x)$.

М18◇2. Выразите функцию $g(x)$ через функцию $f(x)$, если известно, что график g получается из графика f
а) параллельным переносом на вектор $(3,5)$;
б) гомотетией с коэффициентом 2 относительно O;
в) симметрией относительно оси OX;
г) симметрией относительно прямой $x=3$; **д)** симметрией относительно точки O;
е) сжатием в 2 раза к оси OY; **ж)** растяжением в 3 раза от прямой $y=-1$;
з) гомотетией с коэффициентом $-{1}/{3}$ относительно точки $(-3,2)$.

М18◇3. Постройте графики: **а)** $y=\dfrac{1}{x}$; **б)** $y=1-\dfrac{2}{x+1}$; **в)** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$; **г)** $y=\dfrac{2x+3}{2-3x}$;
д) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $ad\neq bc$. **е)** $y=x^2$; **ж)** $y=3-2(x-5)^2$; **з)** $y=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$.

М18◇4. Опишите геометрическое место середин произвольного семейства параллельных хорд данной параболы.

М18◇5. Чтобы познакомиться с Машенькой, Вовочка стёр в её тетрадке оси координат у графиков **а)** $y=x^2$ **б)** $y={1}/{x}$. Как Маше точно восстановить их циркулем и линейкой?

М18◇6. Множество всех решений (x,y) уравнения $\varPhi(x,y)=0$ представляет собой кривую на рис. 18 - 2. Нарисуйте (поточнее) кривые, заданные уравнениями: **а)** $\varPhi(x+2,y-1)=0$;
б) $\varPhi(-x,-y)=0$; **в)** $\varPhi(2x,y)=0$; **г)** $\varPhi\left({x}/{2},2y\right)=0$;
д) $\varPhi(y,x)=0$; **е)** $\varPhi\left(|y|,x\right)=0$; **ж)** $\varPhi(x+y,x-y)=0$;
з) $\varPhi\left({(x\sqrt{3}-y)}/{2},{(x+y\sqrt{3})}/{2}\right)=0$.

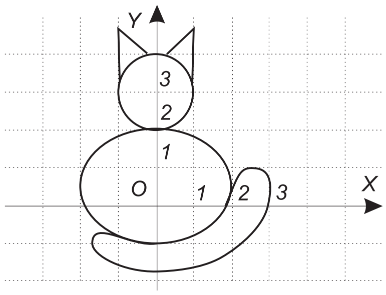

Рис. 18 - 2. Кривая $\Phi(x,y)=0$.

М18◇7. Напишите уравнение, задающее кривую, получающуюся из показанной на рис. 18 - 2 кривой $\varPhi(x,y)=0$:
а) параллельным переносом на вектор $(-2,3)$;
б) растяжением в 2 раза от оси OX;
в) симметрией относительно оси OY;
г) симметрией относительно прямой $y=-2$;
д) симметрией относительно начала координат;
е) гомотетией с коэффициентом 2 относительно начала координат;
ж) поворотом на 45° вокруг начала координат; **з)** сжатием в 3 раза к прямой $x=1$;
и) гомотетией с коэффициентом $-\frac{1}{3}$ относительно точки $(1,-1)$;
к) объединением кривой $\varPhi(x,y)=0$ с графиком функции $y=f(x)$.

М18◇8. Нарисуйте кривые: **а)** $x^2-y^2=1$; **б)** $4\,x^2+9\,y^2=36$; **в)** $16\,x^2-25\,y^2=400$.

М18◇9. Напишите уравнение, задающее **а)** окружность радиуса 3 с центром в точке $(-5,2)$;
б) гиперболу $y={1}/{x}$, сдвинутую и повёрнутую так, что её центр находится в точке $(-5,2)$, а асимптоты составляют углы в 45° с осью OX;
в) параболу $y=x^2$, сдвинутую и повёрнутую так, что её вершина находится в точке $(-1,-1)$, а ось идёт под углом 45° к оси OX.

Предел функции

Предел функции. Пусть функция f определена на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ является его предельной точкой. Число p называется *пределом* функции f при $x \to x_0$ (обозначение: $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать число $\delta > 0$ так, чтобы в каждой отличной от x_0 точке $x \in D_\delta(x_0) \cap X$ значение $f(x)$ принадлежало бы $D_\varepsilon(p)$. Более формально:

$$p = \lim_{x \to x_0} f(x) \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ \forall\, x \in X \quad \Big(x \neq x_0 \quad \& \quad |x - x_0| < \delta \Big) \Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon$$

М19◇1°. Верно ли, что $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ тогда и только тогда, когда для любой сходящейся к x_0 последовательности $(a_n) \subset X$ последовательность $b_n = f(a_n)$ сходится к p? Если да, объясните, почему, если нет, скажите, что надо исправить, чтобы получилась верная теорема.

М19◇2. Вычислите (с явным отысканием δ по ε) : **а)** $\lim\limits_{x \to 3} 4x$; **б)** $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{x - 1}$; **в)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^k - 1}{x - 1}$, $k \in \mathbb{N}$; **г)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{-k} - 1}{x - 1}$, $k \in \mathbb{N}$; **д)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$; **е)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{1/3} - 1}{x - 1}$.

М19◇3°. Пусть функции f, g обе определены на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ является его предельной точкой, и существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = p$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = q$. Сформулируйте и докажите теоремы о пределах (при $x \to x_0$) функций: **а)** $cf(x)$, где c – константа; **б)** $f(x) \pm g(x)$; **в)** $f(x) \cdot g(x)$; **г)** $f(x) / g(x)$.

М19◇4. Пусть функция $y = g(x)$ определена на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ является его предельной точкой, существует $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$, и этот y_0 является предельной точкой для некоего множества $Y \supset g(X)$, на котором задана другая функция $z = f(y)$ с $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = z_0$. Верно ли, что $z_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f\big(g(x)\big)$? Если да, объясните, почему, если нет, скажите, что надо исправить, чтобы получилась верная теорема.

М19◇5°. Дайте формальное определение тому, что $f(x) \to p$ при x, стремящемся к x_0 *слева* или *справа* (обозначения: $x \to x_0 - 0$ или $x \nearrow x_0$, и соответственно, $x \to x_0 + 0$ или $x \searrow x_0$).

М19◇6°. Дайте формальное определение тому, то $f(x) \to p$ при $x \to \infty$, а также при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, в каждом из случаев: **а)** $p \in \mathbb{R}$, **б)** $p = \infty$, **в)** $p = +\infty$, **г)** $p = -\infty$,

М19◇7. Пусть $f(x) \to \infty$ при $x \to 0$. Можно ли что-то сказать про $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{f\left(1/x\right)}$?

М19◇8. Вычислите: **а)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2}$, где $m, n \in \mathbb{N}$; **б)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; **в)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; **г)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{(x + 5)(x - 7)} - x \right)$; **д)** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{1 - \sqrt{x}} - \dfrac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right)$; **е)** $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right)$; **ж)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \right)$.

Асимптоты. Прямая, заданная уравнением $y = ax + b$, называется (*наклонной*) *асимптотой*[1] графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (соотв. при $x \to -\infty$), если $f(x)$ определена при всех $x \gg 0$ (соотв. $x \ll 0$) и $|ax + b - f(x)| \to 0$ при $x \to +\infty$ (соотв. $x \to -\infty$). Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* при x, стремящемся к x_0 слева (соотв. справа), если $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \infty$ (соотв. $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = \infty$).

М19◇9. Нарисуйте (с точным указанием всех асимптот) графики функций: **а)** $x + 1/x$; **б)** $x^2 + 1/x$; **в)** $\dfrac{x + 3}{2 - x}$; **г)** $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$; **д)** $\dfrac{(x + 1)(x - 2)(x + 3)}{x^2 + 1}$; **е)** $\sqrt{x(1 + x)}$.

М19◇10*. Нарисуйте траекторию точки, координаты которой зависят от времени $t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ по закону: **а)** $x = t + 1/t$, $y = t^2 + 1/t$; **б)** $x = t^2/(t - 1)$, $y = t/(t^2 - 1)$.

[1] асимптоты с $a = 0$ называются так же *горизонтальными*

Непрерывные функции

Определения. Пусть функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ определена на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$, и $x_0 \in X$ является предельной точкой этого множества. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, т. е. если $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \quad \forall x \in X \quad |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Функция $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется *непрерывной* на данном множестве, если она определена и непрерывна в каждой точке этого множества.

М20◇1. Проверьте (с явным отысканием δ по ε в каждой точке), что функции $y = 5\,x^2$ и $y = \sqrt[3]{x}/2$ непрерывны во всех точках числовой прямой.

М20◇2. Верно ли, что f непрерывна в $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда для любой сходящейся к x_0 последовательности (a_n) выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$?

М20◇3. Сформулируйте на ε - δ языке то, что функция f разрывна в точке x_0.

М20◇4. Существует ли функция $[\,0\,,\,1\,] \xrightarrow{f} [\,0\,,\,1\,]$ которая **а)** разрывна во всех точках; **б)** непрерывна в единственной точке $x_0 = 1/2$; **в)** то же, но монотонно неубывает; **г)** непрерывна во всех точках $1/k$ с $k \in \mathbb{N}$ и только в них;

М20◇5*. Существует ли функция непрерывная во всех иррациональных точках и разрывная во всех рациональных?

М20◇6. Пусть функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ непрерывна в $x_0 \in X$ и $f(x_0) \neq 0$. Всегда ли у точки x_0 есть такая ε-окрестность D, что функция $y = 1/f(x)$ определена всюду в $D \cap X$ и тоже непрерывна в точке x_0 ?

М20◇7 (инерция знака). Докажите, что в предыдущей задаче окрестность D можно подобрать так, чтобы функция $f(x)$ имела во всех точках $D \cap X$ тот же знак, что и $f(x_0)$.

М20◇8. Сформулируйте и докажите теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух непрерывных функций.

М20◇9. Функция $y = \bigl(f(x)\bigr)^2$ непрерывна на $[\,0\,,\,1\,]$. Может ли при этом функция $y = f(x)$ быть разрывна: **а)** всюду; **б)** всюду кроме оной точки; **в)** ровно в одной точке?

М20◇10 (топологическое определение непрерывности). Докажите, что функция $U \xrightarrow{f} V$ между двумя открытыми множествами $U, V \subset \mathbb{R}$ всюду непрерывна тогда и только тогда, когда полный прообраз $f^{-1}(W) \overset{\text{def}}{=} \{u \in U \mid f(u) \in W\}$ любого открытого подмножества $W \subset V$ открыт.

М20◇11. Верно ли, что всюду непрерывная функция $U \xrightarrow{f} V$ между двумя открытыми множествами $U, V \subset \mathbb{R}$ переводит компактные подмножества $K \subset U$ в компактные?

М20◇12 (свойства непрерывных функций на отрезке). Пусть функция f определена и непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$. Верно ли, что множество значений $f([a, b])$: **а)** ограничено; **б)** содержит свои твг и тнг; **в)** является отрезком; **г)** $\forall\, \alpha, \beta \in [a, b]$ оно содержит все числа c, лежащие между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$.

М20◇13. Докажите, что уравнение $f(x) = 0$, где f — любой многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами, всегда имеет действительное решение.

М20◇14. Математический маятник представляет собой точечный груз массы m подвешенный в однородном вертикальном поле тяжести на конце невесомго абсолютно твёрдого отрезка, способного без трения вращаться в фиксированной вертикальной плоскости вокруг другого своего конца. Маятник без толчка отпускают из положения, составляющего с горизонталью угол α_0. Через 5 мин он оказался с горизонталью под углом α_1. Является ли α_1 непрерывной функцией от α_0 и можно ли подобрать α_0 так, чтобы $\alpha_1 = 60°$?

Геометрические эффекты и топологические патологии

М$20\frac{1}{2}\diamond$1 (волосоида). Нарисуйте график какой-нибудь ограниченной и непрерывной всюду, кроме нуля, функции $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, такой что ни один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)$ не существует.

М$20\frac{1}{2}\diamond$2 (разрывы монотонных функций). Пусть функция f определена всюду на отрезке $[a, b]$ и монотонно неубывает на нём. Верно ли, что

а) $\forall\, c\in(a, b)$ существуют (и конечны) оба односторонних предела $\lim\limits_{x\searrow c} f(x)$ и $\lim\limits_{x\nearrow c} f(x)$;

б) множество точек разрыва функции f на $[a, b]$ не более, чем счётно?

М$20\frac{1}{2}\diamond$3 (непрерывность выпуклых функций). Функция f называется *выпуклой вверх* (соотв. *вниз*) на интервале I, если она определена всюду на I и для любого отрезка $[a, b] \subset I$ график f над интервалом (a, b) лежит строго выше (соотв. строго ниже) отрезка, соединяющего точку $(a, f(a))$ с точкой $(b, f(b))$. Верно ли, что выпуклость (в любую сторону) влечёт непрерывность?

О «редкости» и «малости». Подмножество $M \subset [a, b]$ называется *всюду плотным*, если любой интервал $I \subset [a, b]$ содержит бесконечно много точек из M. Подмножество $M \subset [a, b]$ называется *нигде не плотным*, если в любом интервале $I \subset [a, b]$ можно указать подинтервал $J \subset I$, не содержащий точек из M. Про подмножество $M \subset [a, b]$, которое можно покрыть не более чем счётной системой интервалов, суммарная длина которых сколь угодно мала, говорят, что оно имеет *меру нуль*.

М$20\frac{1}{2}\diamond$4. Имеет ли меру нуль множество: **а)** рациональных **б)** иррациональных чисел?

М$20\frac{1}{2}\diamond$5. Будет ли канторово множество **а)** нигде не плотным **б)** множеством меры нуль?

М$20\frac{1}{2}\diamond$6. Можно ли представить отрезок в виде объединения счётного набора его

а) подмножеств меры нуль? **б)** нигде не плотных подмножеств?

М$20\frac{1}{2}\diamond$7. Можно ли представить множество иррациональных чисел на $[\,0\,,\,1\,]$ в виде объединения счётного набора замкнутых множеств?

М$20\frac{1}{2}\diamond$8. Докажите, что множество точек непрерывности произвольной функции является пересечением счётного набора открытых множеств.

М$20\frac{1}{2}\diamond$9. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных?

М$20\frac{1}{2}\diamond$10. Существует ли непрерывная функция $[\,0\,,\,1\,] \xrightarrow{f} [\,0\,,\,1\,]$, график которой *всюду плотен*[1] в единичном квадрате?

М$20\frac{1}{2}\diamond$11* (канторова лесенка). Существует ли непрерывная монотонно неубывающая функция $[\,0\,,\,1\,] \xrightarrow{f} [\,0\,,\,1\,]$, которая сюрьективно отображает канторово множество на $[\,0\,,\,1\,]$?

М$20\frac{1}{2}\diamond$12* (кривая Пеано). Существует ли сюрьективное и *непрерывное*[2] отображение единичного отрезка $[\,0\,,\,1\,] \subset \mathbb{R}^1$ на единичный квадрат $[\,0\,,\,1\,] \times [\,0\,,\,1\,] \subset \mathbb{R}^2$?

М$20\frac{1}{2}\diamond$13*. Существует ли *непрерывная в обе стороны* биекция[3] между отрезком и квадратом?

М$20\frac{1}{2}\diamond$14* (универсальное замкнутое множество). Существует ли замкнутое подмножество единичного квадрата, среди сечений которого прямыми, параллельными оси OX, встречаются все замкнутые подмножества единичного отрезка?

---

[1]это означает, что любой непустой открытый квадратик пересекается с графиком

[2]отображение $[\,0\,,\,1\,] \xrightarrow{\varphi} [\,0\,,\,1\,] \times [\,0\,,\,1\,]$ непрерывно, если $\forall x_0 \in [\,0\,,\,1\,]$, $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(x), \varphi(x_0)| < \varepsilon$.

[3]непрерывные в обе стороны биекции называются *гомеоморфизмами*

Длина окружности и площадь круга

М21◇1°. У какого из выпуклых многоугольников $M_1 \subset M_2$ меньше площадь и периметр?

Обозначения. Разбиение $\boldsymbol{p}$ данной дуги AB на данной окружности с центром O — это набор точек $\boldsymbol{p} = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\} \subset AB$, расположенных на дуге так, что $P_0 = A$, $P_n = B$, и при всех $i = 1, 2, \ldots, (n-1)$ точка P_i лежит строго между P_{i-1} и P_{i+1}. Ломаная $P_0P_1P_2\ldots P_n$ называется *вписанной ломаной* разбиения $\boldsymbol{p}$, её длина обозначается через $\ell(\boldsymbol{p})$, а длина самой длиной её стороны — через $\lambda(\boldsymbol{p})$ (она называется *мелкостью* разбиения $\boldsymbol{p}$). Многоугольник $OP_0P_1P_2\ldots P_n$ называется *внутренним многоугольником* разбиения $\boldsymbol{p}$, а его площадь обозначается $S(\boldsymbol{p})$.

М21◇2. Для любых разбиений $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ постройте разбиение $\boldsymbol{p}$, содержащее как $\boldsymbol{p}_1$, так и $\boldsymbol{p}_2$, и докажите, что множества значений $\ell(\boldsymbol{p})$ и $S(\boldsymbol{p})$ при всевозможных $\boldsymbol{p}$ ограничены сверху.

Определения. $\ell(AB) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{\boldsymbol{p}} \ell(\boldsymbol{p})$ называется *линой дуги*, а $S(AOB) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{\boldsymbol{p}} S(\boldsymbol{p})$ — *площадью сектора*.

М21◇3°. Пусть $AC = AB \cup BC$, и $AB \cap BC = B$. Выразите $\ell(AC)$ и $S(AOC)$ через $\ell(AB)$, $\ell(BC)$, $S(AOB)$ и $S(BOC)$.

М21◇4°. Докажите, что отношение $\ell(AB)$ к радиусу и к длине полуокружности, а также отношение $S(AOB)$ к квадрату радиуса, зависят только от величины угла AOB, но не от радиуса окружности и положения дуги на ней.

М21◇5. Покажите, что $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, такое что для всякого разбиения $\boldsymbol{p}$ мелкости $\lambda(\boldsymbol{p}) < \delta$ обе погрешности $|\ell(AB) - \ell(p)|$ и $|S(AOB) - S(p)|$ не превышают ε.

М21◇6. Выразите площадь сектора через длину дуги и радиус.

Радианная мера угла показывает, какую часть составляет этот угол от развёрнутого угла π. Точнее, длина полуокружности единичного радиуса обозначается через π, и если отношение длины дуги AB к длине полуокружности того же радиуса равно ϑ, то говорят, что дуга AB (и центральный угол AOB) составляют $\vartheta\pi$ радиан. Подчеркнём, что $\vartheta\pi \in \mathbb{R}$.

М21◇7 (архимедово вычисление числа π). Пусть p_n — это разбиение полуокружности радиуса 1 на 2^n равных дуг, и $\lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(p_n)$, $\ell_n \stackrel{\text{def}}{=} \ell(p_n)$, $S_n \stackrel{\text{def}}{=} S(p_n)$. Выразите λ_n, ℓ_n и S_n через λ_{n-1} и представьте λ_n как $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2}}}}}$ (сколько тут радикалов?). Используя только четыре арифметических действия и извлечение квадратных корней[1], вычислите число π с точностью до 2-го знака после запятой.

Универсальное накрытие окружности и тригонометрические функции. Сопоставим каждому числу $t \in \mathbb{R}$ точку на единичной окружности $S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, получающуюся откладыванием от точки $(1, 0)$ дуги длины $|t|$ по ЧС, если $t < 0$, и против ЧС, если $t > 0$ (иначе говоря, числовая прямая $\mathbb{R}^1$, ориентированная также, как ось OY, приставляется своим нулём $0 \in \mathbb{R}^1$ к точке $(1, 0) \in S^1$ и затем наматывается на S^1, как нерастяжимая нитка на катушку). Числа $t \in \mathbb{R}$, отличающиеся на целое число оборотов (т.е. на целые кратные 2π), перейдут при этом в одну и ту же точку окружности. Набор чисел $t \in \mathbb{R}$, переходящих в данную точку $P = (x, y)$, называется *аргументом* точки[2] P и обозначается $\operatorname{Arg}(P)$, а координаты (x, y) точки P называются *косинусом* и *синусом* числа $t \in \mathbb{R}$. Функции $\cos t \stackrel{\text{def}}{=} x$, $\sin t \stackrel{\text{def}}{=} y$, $\operatorname{tg} t \stackrel{\text{def}}{=} \sin t/\cos t$, $\operatorname{ctg} t \stackrel{\text{def}}{=} \cos t/\sin t$, $\sec t \stackrel{\text{def}}{=} 1/\cos t$ и $\operatorname{cosec} t \stackrel{\text{def}}{=} 1/\sin t$ называются *тригонометрическими* функциями числа $t \in \mathbb{R}$. Из этих определений вытекают *основные тригонометрические тождества*: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, $\operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t - 1$, $\operatorname{ctg}^2 t = \operatorname{cosec}^2 t - 1$.

М21◇8. Вычислите: **а)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ **г)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ **д)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x \sin(2x)}$

М21◇9. Все ли тригонометрические функции непрерывны[3] всюду, где определены?

[1] можете, по немощи своей, использовать тут машинку, которой, однако, у Архимеда не было

[2] или *многозначным ориентированным углом* луча OP с осью OX

[3] совет: начните с синуса

Комплексные числа

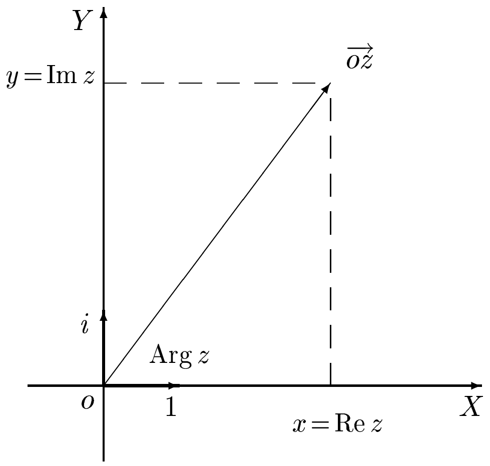

Рис. 22 - 1. Комплексное число.

Комплексное число — это точка z на плоскости $\mathbb{C}$ с фиксированной системой прямоугольных координат XoY, единичные базисные векторы которой обозначаются $\{\overrightarrow{1}, \overrightarrow{i}\}$ (см. рис. 22 - 1). С каждым $z\in\mathbb{C}$ свяжем пару координат (x, y) и радиус-вектор $\overrightarrow{oz} = x\cdot\overrightarrow{1} + y\cdot\overrightarrow{i}$, что обычно записывают просто как $z = x + iy$. Действительные числа $\operatorname{Re} z \stackrel{\text{def}}{=} x$, $\operatorname{Im} z \stackrel{\text{def}}{=} y$ и $|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2+y^2}$ называются *вещественной частью*, *мнимой частью* и *модулем* комплексного числа z. Многозначный ориентированный угол[1] луча oz с осью oX называется *аргументом* z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Комплексные числа можно *складывать* и *перемножать*. По определению, при сложении комплексных чисел их радиус-векторы складываются (по правилу параллелограмма), а при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются (так что умножение на фиксированное комплексное число $a : \mathbb{C} \xrightarrow{z\mapsto az} \mathbb{C}$ есть *поворотная гомотетия* на угол $\operatorname{Arg}(a)$ с центром o и коэффициентом $|a|$).

М22◇1°. Найдите[2] **а)** i^2; **б)** i^3; **в)** $1/i - 1$; **г)** $(1+i)^5/(1-i)^3$; **д)** $\left(\sqrt{3}+i/1-i\right)^{30}$; **е)** $\left(i-\sqrt{3}/i-1\right)^{90}$; **ж)** все z с $z^4=-1$; **з)** все z с $z^3 = -i$.

М22◇2° (сопряжение). $\overline{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - iy$ называется *сопряжённым* к $z = x - iy$; проверьте, что сопряжение перестановочно со сложением и умножением и выразите $1/z$ через $\overline{z}$ и $|z|$.

М22◇3°. Проверьте, что комплексные числа составляют *поле*[3], в которое поле $\mathbb{R}$ с сохранением операций вкладывается в качестве числовой прямой (oX). Вычислите действительную и мнимую части чисел $1/z$, $z+w$ и zw, если $z = x_1 + iy_1$, $w = x_2 + iy_2$.

М22◇4. Найдите: **а°)** $(5+i)(7-6i)/(3+i)$; **б)** $(1+it)/(1-it)$ с $t\in\mathbb{R}$.

М22◇5°. Решите ур-я: **а)** $z^2 + (2i-7)z + (13-i) = 0$ **б)** $(z+i)^3 + (z-i)^3 = 0$ **в)** $\overline{z} = z^3$

М22◇6°. Пусть $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $w = \cos\beta + i\sin\beta$. Вычислите геометрически и путём раскрытия скобок действительную и мнимую части чисел **а)** zw **б)** z^2 **в)** z^3 **г)** z^4 и получите отсюда тригонометрические формулы «сложения аргуметов» и «кратных углов».

М22◇7. Решите в $\mathbb{C}$ уравнение $z^5 = 1$ и вычислите $\cos\left(2\pi/5\right)$ и $\sin\left(2\pi/5\right)$ в радикалах.

М22◇8. Куда отображения **а)** $z \longmapsto z^2$ **б)** $z\longmapsto 1/z$ переводят декартову и полярную координатную сетки, окружность $|z+i| = 1$ и кошечку с рис. 18 - 2?

М22◇9. Вычислите суммы: **а)** $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$ и $1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$
б) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$ **в)** $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots$ **г)** $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots$
д) $2\sin x + 3\sin 2x + \dots + n\sin(n-1)x$ и $1 + 2\cos x + 3\cos 2x + \dots + n\cos(n-1)x$
е) $1 + 2\zeta + 3\zeta^2 + \dots + n\zeta^{n-1}$, где $\zeta = \cos\left(2\pi/n\right) + i\sin\left(2\pi/n\right)$

М22◇10. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ вычислите сумму и произведение s-тых степеней всех комплексных корней уравнения $z^n = 1$ при $s = 1, 2, 3 \dots$.

[1] напомним(см. **Лст. № 21**), что с точностью до любого целого числа оборотов он равен ориентированной длине дуги, которую надо пройти по единичной окружности от луча $[oX)$ до луча $[oz)$, т. е. $\operatorname{Arg} z = \{\varphi + 2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}$, где φ — это радианная мера ориентированного угла $\widehat{xoz}$, а k — любое целое число

[2] в этом листке «найдите z» означает «нарисуйте $\overrightarrow{oz}$ и вычислите $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ и $\operatorname{Arg} z$»

[3] т. е. что сложение и умножение подчиняются переместительному, сочетательному и распределительному законам, а уравнения $a + z = b$ и $cz = d$ при любых заданных a, b, d и $c \neq 0$ единственным образом разрешимы относительно z

Корни многочленов.

Обозначения. Пусть $\mathbb{F}$ обозначает любое из полей $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Множество многочленов от переменной x с коэффициентами из $\mathbb{F}$ обозначается через $\mathbb{F}[x]$. Число α называется *m-кратным корнем* f, если $f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$, где $g(\alpha)\neq 0$. Для любого $f\in\mathbb{F}[x]$ частное $(f(u)-f(w))/(u-v)$ является *многочленом* от переменных u, v, и многочлен $f'(x)$, получающийся подстановкой в это частное $u=v=x$, называется *производным* от f.

М22$\frac{1}{2}$◇1. Убедитесь, что определение f' корректно и для $f\in\mathbb{R}[x]$ согласуется с **Лст. № 23**.

М22$\frac{1}{2}$◇2. Какие импликации «$\Rightarrow$» и «$\Leftarrow$» имеются между следующими условиями на $\alpha\in\mathbb{C}$ и $f\in\mathbb{F}[x]$: **а)** $f(x)=(x-\alpha)^2\cdot g(x)$ в $\mathbb{C}[x]$ **б)** $f'(\alpha)=0$ **в)** $\deg \text{НОД}(f,f')>0$

М22$\frac{1}{2}$◇3. Пусть $f\in\mathbb{R}[x]$ имеет корень $z=x+iy\in\mathbb{C}$. Будет ли корнем f и $\overline{z}=x-iy$?

М22$\frac{1}{2}$◇4. Разложите x^8+128 в произведение вещественных квадратных трёхчленов.

М22$\frac{1}{2}$◇5 (формулы Виета). Каков коэффициент при x^k у $f(x)=a_0\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$?

М22$\frac{1}{2}$◇6. Можно ли заменой $x=t+\alpha$ уничтожить в $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$
а) член с x^{n-1} **б)** два члена с x^{n-1} и с x^{n-2}?

М22$\frac{1}{2}$◇7 (дискриминант). В обозначениях зад. М22$\frac{1}{2}$◇5 число $D_f\overset{\text{def}}{=}a_0^{2n-2}\prod\limits_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$ называется *дискриминантом* f. Выразите через p и q дискриминант: **а)** x^2+px+q **б)** x^3+px+q.

М22$\frac{1}{2}$◇8. Докажите, что любой вещественный кубический многочлен f имеет в $\mathbb{C}$ либо три вещественных корня (возможно, кратных), либо ровно один вещественный и два невещественных комплексно сопряжённых корня. Как различить эти случаи глядя на D_f?

М22$\frac{1}{2}$◇9 (решение кубического уравнения в тригонометрических функциях). Пользуясь формулой для косинуса тройного угла, выразите корни многочлена $4x^3-3x-a$ с $a\in\mathbb{R}$ и $|a|\leqslant 1$ через тригонометрические функции. При каких условиях на p, q многочлен x^3+px+q можно заменой $x\mapsto\alpha x$ сделать пропорциональным многочлену $4x^3-3x-a$ с $a\in\mathbb{R}$ и $|a|\leqslant 1$?

М22$\frac{1}{2}$◇10. Решите уравнения: **а)** $x^3-3x+1=0$, **б)** $x^3+x^2-2x-1=0$.

М22$\frac{1}{2}$◇11 (решение кубического уравнения методом Кардано). Придумайте квадратное уравнение, корни z_1, z_2 которого таковы, что $\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}$ является корнем кубического трёхчлена $f(x)=x^3+px+q$. Какой знак должен быть у D_f, чтобы числа z_1, z_2 оказались:
а) вещественны и различны? **б)** комплексно сопряжены?

М22$\frac{1}{2}$◇12. Найдите вещественные корни многочленов: **а)** x^3-x+1; **б*)** x^3+2x^2+x+1.

М22$\frac{1}{2}$◇13. Вычислите в радикалах: **а)** $\cos(\pi/9)$, **б)** $\cos(\pi/12)$, **в*)** $\cos(\pi/7)$.

Топология поля $\mathbb{C}$. Под ε-окрестностью числа $z_0\in\mathbb{C}$ мы понимаем $D_e(z_0)\overset{\text{def}}{=}\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|<\varepsilon\}$, т. е. открытый круг радиуса ε с центром в z_0. Пределы комплексных последовательностей и функций, непрерывность функций $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, предельные и изолированные точки комплексных множеств, открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{C}$ и т. п. определяются дословно так же, как в $\mathbb{R}$.

М22$\frac{1}{2}$◇14°. Сформулируйте и докажите теоремы о пределе суммы и произведения двух сходящихся комплексных последовательностей. Верно ли, что $z_n=x_n+iy_n\to z_0=x_0+iy_0$ в $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда $x_n\to x_0$ и $y_n\to y_0$ в $\mathbb{R}$?

М22$\frac{1}{2}$◇15. Пусть $f\in\mathbb{C}[x]$ — произвольный многочлен, отличный от константы. Верно ли, что:
а) $\forall$ замкнутого круга $D\subset\mathbb{C}$ $\exists\, z_1,z_2\in D$: $|f(z_1)|=\inf_D|f(z)|$ и $|f(z_2)|=\sup_D|f(z)|$;
б) $|f(z)|\to\infty$ при $z\to\infty$; **в)** $\exists\, z_0\in\mathbb{C}$: $|f(z_0)|=\inf_{\mathbb{C}}|f(z)|$?

М22$\frac{1}{2}$◇16. Пусть $f\in\mathbb{C}[x]$, и $f(z_0)\neq 0$. Найдите вблизи z_0 точку z_1, в которой[1] $|f(z_1)|<|f(z_0)|$, и выведите из этого, что любой многочлен $f\in\mathbb{C}[x]$ имеет корень в $\mathbb{C}$.

[1] подсказка: положим $z=z_0+w$ и разложим $f(z)$ по возрастающим степеням w: $f(z)=f(z_0)+a_1w+a_2w^2+\cdots$. Рассмотрите наименьшее m, для которого $a_m\neq 0$, т. е. $f(z)=f(z_0)+a_mw^m+$ более старшие степени w, возьмите $\vartheta\in\mathbb{C}$ так, чтобы $a_m\vartheta^m=-f(z_0)$, и ищите z_1 в виде $z_0+t\vartheta$ с $t\in\mathbb{R}$

Производная и дифференциал.

Определения и обозначения. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция f называется *дифференцируемой* в точке x_0, если $f(x) = f(x_0) + \alpha \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$, где α — некоторая константа, а $o(t)$ — функция, такая что $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{o(t)}{t} = 0$. Говоря неформально, дифференцируемость означает, что с точностью до бесконечно малой по сравнению с $(x - x_0)$ функции $o(x - x_0)$ разность $f(x) - f(x_0)$ ведет себя как *линейная однородная функция* $\alpha \cdot (x - x_0)$ от разности $(x - x_0)$. Коэффициент α называется *производной* функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$, а линейная однородная функция $\alpha\,(x - x_0)$ называется *дифференциалом* функции f в точке x_0 и обозначается df_{x_0}. Например, функция $y = x$ дифференцируема в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$, её производная $x' \equiv 1$, а дифференциал $dx_{x_0} = (x - x_0)$ в каждой точке x_0. Поэтому, допуская понятную вольность, производную дифференцируемой функции $f(x)$ часто обозначают через $\dfrac{df}{dx}$, имя в виду, что $\dfrac{\alpha\,(x - x_0)}{x - x_0} = \alpha$.

М23◇1°. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Докажите, что она дифференцируема в x_0, если и только если существует конечный предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}\,,$$

причём этот предел, буде он существует, равен $f'(x_0)$.

М23◇2°. Прямая называется *касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $A = (x_0, f(x_0))$, если она является пределом какой-либо последовательности проходящих через A секущих прямых (A, B_n), где $B_n = (x_n, f(x_n))$ и $x_n \to x_0$. Докажите, что если f дифференцируема в x_0, то касательная существует и единственна. Напишите для неё явное уравнение.

М23◇3. На рис. 18 - 1 был изображён график функции $y = f(x)$. Нарисуйте график функции:
а) $y = f'(x)$, **б)** $y = F(x)$, где $F(x)$ такова, что $F(0) = 0$ и $F'(x) = f(x)\ \forall x$.

М23◇4°. Всякая ли дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в точке x_0?

М23◇5°. Всякая ли непрерывная в точке x_0 функция, определённая в некоторой её окрестности, дифференцируема в x_0?

М23◇6. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Дифференцируемы ли в x_0 функции:
а) $f(x) \pm g(x)$, **б)** $\lambda\, f(x)$, где $\lambda = \mathrm{const}$, **в)** $f(x)g(x)$; **г)** $f(x)/g(x)$, где $g(x_0) \neq 0$.
Если да, то выразите их производные в x_0 через $f(x_0)$, $g(x_0)$, $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$.

М23◇7. Пусть $h(x) = f(g(x))$, причём $g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а $f(x)$ дифференцируема в точке $g(x_0)$. Докажите, что $h(x)$ дифференцируема в точке x_0 и выразите $h'(x_0)$ через f, g, f' и g'.

М23◇8. Пусть f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) > 0$. Найдётся ли у точки x_0 такая ε-окрестность, где $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$?

М23◇9 (теорема Ферма). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой ε-окрестности U точки x_0, дифференцируема в точке x_0 и $f(x) \leqslant f(x_0)\ \ \forall\, x \in U$. Вычислите $f'(x_0)$.

М23◇10 (теорема Ролля). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема во всех точках (a, b), и $f(a) = f(b)$. Существует ли точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f'(x_0) = 0$?

М23◇11 (теорема Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех точках (a, b). Всегда ли найдётся такая точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f'(x_0) = \big(f(b) - f(a)\big)\big/(b - a)$?

М23◇12. Верно ли, что для любой дифференцируемой в некоторой окрестности отрезка $[a, b]$ функции f, такой что $f'(a) > 0$, а $f'(b) < 0$, существует $x_0 \in [a, b]$ такое, что $f'(x_0) = 0$?

М23◇13 (теорема Дарбу). Пусть f определена и дифференцируема в некоторой окрестности отрезка $[a, b]$. Верно ли, что $f'(x)$ принимает на $[a, b]$ все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$?

Приложения производных к исследованию функций.

Функции, дифференцируемые на отрезке. Пределы $\lim\limits_{x\nearrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ и $\lim\limits_{x\searrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (если они существуют и конечны) называются *левой* и *правой* производными функции f в точке x_0. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на отрезке* $[a,b]$, если она дифференцируема в каждой точке (a,b) и имеет левую производную в точке b и правую в точке a. Говорят, что функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{C}^k[a,b]$, если сама f и её первые $(k-1)$ производных f', f'', … , $f^{(k-1)}$ дифференцируемы на $[a,b]$, причём k-тая производная $f^{(k)}=\left(f^{(k-1)}\right)'$ непрерывна на $[a,b]$. Пересечение $\mathscr{C}^\infty[a,b]\stackrel{\text{def}}{=}\bigcap\limits_{k\geqslant 0}\mathscr{C}^k[a,b]$ называется пространством *бесконечно гладких* функций на $[a,b]$.

М24◇1°. Пусть функции f и g дифференцируемы на $[a,b]$ и $f'\equiv g'$ всюду на $[a,b]$. Верно ли, что разность $f-g$ постоянна на $[a,b]$?

М24◇2. Пусть f дифференцируема на $[a,b]$ и $f'(x)>0$ $\forall\, x\in[a,b]$. Верно ли, что f строго возрастает на $[a,b]$? Что изменится, если заменить неравенство $f'(x)>0$ на неравенство: **а)** $f'(x)\geqslant 0$? **б)** $f'(x)<0$? **в)** $f'(x)\leqslant 0$?

М24◇3. Пусть f строго убывает на $[a,b]$. Верно ли, что $\forall\, x\in[a,b]$ **а)** $f'(x)>0$; **б)** $f'(x)\geqslant 0$?

М24◇4. Что изменится в предыдущей задаче, если: **а)** f строго возрастает; **б)** f монотонно неубывает; **в)** f монотонно невозрастает.

Локальные экстремумы. Точка x_0 называется точкой *локального максимума* (соотв. *минимума*) функции f, если существует ε-окрестность U точки x_0, такая, что $f(x)<f(x_0)$ (соотв. $f(x)>f(x_0)$) $\forall\, x\in U$. Локальные максимумы и минимумы вкупе называются *локальными экстремумами* функции f. Точки x, где f дифференцируема и $f'(x)=0$ называются *стационарными точками* функции f.

М24◇5°. Верно ли, что локальные экстремумы дифференцируемой функции являются её стационарными точками? Верно ли обратное?

М24◇6*. Существует ли **а)** какая-нибудь **б)** непрерывная **в)** дифференцируемая функция с непустым множеством локальных максимумов, устроенным так, что в любой окрестности любого локального максимума имеются другие локальные максимумы?

М24◇7. Пусть производная дифференцируемой функции непрерывно возрастает в некоторой окрестности точки x_0, меняя в x_0 знак с минуса на плюс. Являются ли x_0 её локальным минимумом? Есть ли аналогичный критерий для локального максимума?

Направления выпуклости. Функция f называется *строго выпуклой вверх* (соотв. *вниз*) на отрезке $[a,b]$, если $\forall\,[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ график $f(x)$ над (α,β) лежит строго выше (соотв. ниже) отрезка, соединяющего точки $(\alpha,f(\alpha))$ и $(\beta,f(\beta))$. Если f строго выпукла на $[a,b]$ и строго выпукла в другую сторону на $[b,c]$, то точка $b\in[a,c]$ называется *точкой перегиба* графика функции f.

М24◇8. Докажите, что дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция f строго выпукла вверх тогда и только тогда, когда $f'(x)$ убывает на $[a,b]$, и аналогичный критерий выпуклости вниз.

М24◇9. Пусть дважды дифференцируемая на $[a,c]$ функция f имеет перегиб в точке $b\in(a,c)$. Является ли b локальным экстремумом для f'?

М24◇10. Пусть у дважды дифференцируемой на $[a,b]$ функции $f'(x_0)=0$ и **а)** $f''(x_0)>0$ **б)** $f''(x_0)<0$. Имеет ли f в x_0 локальный экстремум, и если да, то какого типа?

М24◇11 (неравенство Иенсена). Пусть $f''\geqslant 0$ всюду на $[a,b]$. Докажите, что для любых $x_k\in[a,b]$ и $\lambda_k>0$ выполнено неравенство $f\left(\left(\sum\lambda_k x_k\right):\left(\sum\lambda_k\right)\right)\leqslant\left(\sum\lambda_k f(x_k)\right):\left(\sum\lambda_k\right)$.

М24◇12 (неравенство Коши - Буняковского). Докажите, что $(x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2)$ и опишите все случаи, когда имеет место равенство.

М24◇13. Пусть функция f всюду дифференцируема на $[0,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=a\in\mathbb{R}$. Верно ли, что график функции f имеет при $x\to+\infty$ асимптоту вида $y=ax+b$?

Дополнительные задачи про производные

М$24\frac{1}{2}$◇1. Всегда ли между двумя вещественными корнями многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$ лежит вещественный корень многочлена f'?

М$24\frac{1}{2}$◇2* (теорема Декарта). Обозначим через $N(f)$ число положительных корней многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$, а через $L(f)$ количество перемен знака в последовательности его коэффициентов. Верно ли, что: **а)** L и N не меняются от умножения f на $\pm x^m$ **б)** $L(f) \equiv N(f) \pmod 2$ **в)** $L(f') \leqslant L(f)$ **г)** $N(f) \leqslant N(f') + 1$ **д)** $L(f(x)) + L((-1)^{\deg f} f(-x)) \leqslant \deg f$ **е)** $N(f) \leqslant L(f)$ **ж)** $N(f) = L(f)$, если все корни f в поле $\mathbb{C}$ вещественны.

М$24\frac{1}{2}$◇3. Сколько вещественных корней у: **а)** $x^3 - 3x^2 - 9x + a$ **б)** $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$

М$24\frac{1}{2}$◇4 (Правило Лопиталя). Пусть функции f и g определены и дифференцируемы всюду в некоторой окрестности точки x_0 за исключением самой этой точки, и при $x \to x_0$ отношение f/g представляет собой неопределённость вида **а)** $0/0$ **б)** ∞/∞. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f'/g'\Big)$ существует и равен $p \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f/g\Big)$ тоже существует и равен p.

М$24\frac{1}{2}$◇5. Остаётся ли правило Лопиталя в силе, если x_0 и/или p равны $\pm\infty$ или ∞?

М$24\frac{1}{2}$◇6. Вычислите: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} x - 1}{x^2}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^2}$

М$24\frac{1}{2}$◇7 (формула Тейлора - Лагранжа). Докажите, что $\forall\ f \in \mathscr{C}^k[a,b]$ и $\forall\ x, x_0 \in [a,b]$ $f(x) = \dfrac{1}{k!}\,f^{(k)}(\vartheta)\cdot(x-x_0)^k + \sum\limits_{\nu=0}^{k-1}\dfrac{1}{\nu!}\,f^{(\nu)}(x_0)\cdot(x-x_0)^\nu$ для некоторого ϑ из отрезка с концами в x_0 и x. (Совет: начните с $k = 1, 2, 3, \ldots$)

М$24\frac{1}{2}$◇8*. Заменяя иррациональности подходящими тейлоровскими разложениями (или как-то ещё) вычислите: **а)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$ **б)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$ **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$ **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$

М$24\frac{1}{2}$◇9. Пусть функция f бесконечно дифференцируема в ε-окрестности U точки x_0, и существует такая константа $c \in \mathbb{R}$, что $|f^{(n)}(x)| < c\ \ \forall x \in U$ и $\forall n \in \mathbb{N}$. Постройте степенной ряд вида $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k(x-x_0)^k \in \mathbb{R}[[(x-x_0)]]$, который $\forall x \in U$ абсолютно сходится к $f(x)$.

М$24\frac{1}{2}$◇10. Найдите в $\mathbb{Q}[[x]]$ два степенных ряда, которые при каждом $x \in \mathbb{R}$ абсолютно сходятся к $\sin(x)$ и к $\cos(x)$ соответственно.

М$24\frac{1}{2}$◇11. Рассмотрим ряды $\sin(z)$ и $\cos(z)$ из предыдущей задачи как элементы из $\mathbb{C}[[z]]$, а также ряд $e^z = \sum z^k/k! \in \mathbb{C}[[z]]$. Будут ли все три ряда абсолютно сходиться при любом $z \in \mathbb{C}$? Докажите *формулу Эйлера*: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $e^{x+iy} = \cos(x) + i\sin(y)$ как комплексные числа.

М$24\frac{1}{2}$◇12 (Канторова лесенка). Существует ли монотонно неубывающая сюрьективная непрерывная функция $f : [\,0\,,\,1\,] \longrightarrow [\,0\,,\,1\,]$, у которой всюду за исключением, разве что, нигде не плотного подмножества меры нуль $f'(x)$ существует и равна нулю.

М$24\frac{1}{2}$◇13* (Лейбницева пила). Постройте непрерывную функцию на $[\,0\,,\,1\,]$, не дифференцируюмую ни в одной точке.

М$24\frac{1}{2}$◇14*. Пусть $f'(x) \in \mathbb{R}$ существует $\forall x \in [a,b]$. Может ли f' быть всюду разрывна на $[a,b]$?

М$24\frac{1}{2}$◇15*. Функция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема и $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$, такое что n-тая производная от f обращается в нуль в точке x. Верно ли, что f — многочлен?