Приложения производных к исследованию функций.

Функции, дифференцируемые на отрезке. Пределы $\lim\limits_{x\nearrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ и $\lim\limits_{x\searrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (если они существуют и конечны) называются *левой* и *правой* производными функции f в точке x_0. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на отрезке* $[a,b]$, если она дифференцируема в каждой точке (a,b) и имеет левую производную в точке b и правую в точке a. Говорят, что функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{C}^k[a,b]$, если сама f и её первые $(k-1)$ производных f', f'', … , $f^{(k-1)}$ дифференцируемы на $[a,b]$, причём k-тая производная $f^{(k)}=\left(f^{(k-1)}\right)'$ непрерывна на $[a,b]$. Пересечение $\mathscr{C}^\infty[a,b]\overset{\text{def}}{=}\bigcap\limits_{k\geqslant 0}\mathscr{C}^k[a,b]$ называется пространством *бесконечно гладких* функций на $[a,b]$.

М24◇1°. Пусть функции f и g дифференцируемы на $[a,b]$ и $f'\equiv g'$ всюду на $[a,b]$. Верно ли, что разность $f-g$ постоянна на $[a,b]$?

М24◇2. Пусть f дифференцируема на $[a,b]$ и $f'(x)>0\ \ \forall\, x\in[a,b]$. Верно ли, что f строго возрастает на $[a,b]$? Что изменится, если заменить неравенство $f'(x)>0$ на неравенство:
а) $f'(x)\geqslant 0$? **б)** $f'(x)<0$? **в)** $f'(x)\leqslant 0$?

М24◇3. Пусть f строго убывает на $[a,b]$. Верно ли, что $\forall\, x\in[a,b]$ **а)** $f'(x)>0$; **б)** $f'(x)\geqslant 0$?

М24◇4. Что изменится в предыдущей задаче, если: **а)** f строго возрастает;
б) f монотонно неубывает; **в)** f монотонно невозрастает.

Локальные экстремумы. Точка x_0 называется точкой *локального максимума* (соотв. *минимума*) функции f, если существует ε-окрестность U точки x_0, такая, что $f(x)<f(x_0)$ (соотв. $f(x)>f(x_0)$) $\forall\, x\in U$. Локальные максимумы и минимумы вкупе называются *локальными экстремумами* функции f. Точки x, где f дифференцируема и $f'(x)=0$ называются *стационарными точками* функции f.

М24◇5°. Верно ли, что локальные экстремумы дифференцируемой функции являются её стационарными точками? Верно ли обратное?

М24◇6*. Существует ли **а)** какая-нибудь **б)** непрерывная **в)** дифференцируемая функция с непустым множеством локальных максимумов, устроенным так, что в любой окрестности любого локального максимума имеются другие локальные максимумы?

М24◇7. Пусть производная дифференцируемой функции непрерывно возрастает в некоторой окрестности точки x_0, меняя в x_0 знак с минуса на плюс. Являются ли x_0 её локальным минимумом? Есть ли аналогичный критерий для локального максимума?

Направления выпуклости. Функция f называется *строго выпуклой вверх* (соотв. *вниз*) на отрезке $[a,b]$, если $\forall\,[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ график $f(x)$ над (α,β) лежит строго выше (соотв. ниже) отрезка, соединяющего точки $(\alpha,f(\alpha))$ и $(\beta,f(\beta))$. Если f строго выпукла на $[a,b]$ и строго выпукла в другую сторону на $[b,c]$, то точка $b\in[a,c]$ называется *точкой перегиба* графика функции f.

М24◇8. Докажите, что дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция f строго выпукла вверх тогда и только тогда, когда $f'(x)$ убывает на $[a,b]$, и аналогичный критерий выпуклости вниз.

М24◇9. Пусть дважды дифференцируемая на $[a,c]$ функция f имеет перегиб в точке $b\in(a,c)$. Является ли b локальным экстремумом для f'?

М24◇10. Пусть у дважды дифференцируемой на $[a,b]$ функции $f'(x_0)=0$ и **а)** $f''(x_0)>0$ **б)** $f''(x_0)<0$. Имеет ли f в x_0 локальный экстремум, и если да, то какого типа?

М24◇11 (неравенство Иенсена). Пусть $f''\geqslant 0$ всюду на $[a,b]$. Докажите, что для любых $x_k\in[a,b]$ и $\lambda_k>0$ выполнено неравенство $f\left(\left(\sum\lambda_k x_k\right):\left(\sum\lambda_k\right)\right)\leqslant\left(\sum\lambda_k f(x_k)\right):\left(\sum\lambda_k\right)$.

М24◇12 (неравенство Коши - Буняковского). Докажите, что $(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)$ и опишите все случаи, когда имеет место равенство.

М24◇13. Пусть функция f всюду дифференцируема на $[0,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=a\in\mathbb{R}$. Верно ли, что график функции f имеет при $x\to+\infty$ асимптоту вида $y=ax+b$?