Дополнительные задачи про производные

M24$\frac{1}{2}$◇1. Всегда ли между двумя вещественными корнями многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$ лежит вещественный корень многочлена f'?

M24$\frac{1}{2}$◇2* (теорема Декарта). Обозначим через $N(f)$ число положительных корней многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$, а через $L(f)$ количество перемен знака в последовательности его коэффициентов. Верно ли, что: **а)** L и N не меняются от умножения f на $\pm x^m$ **б)** $L(f) \equiv N(f) \pmod 2$ **в)** $L(f') \leqslant L(f)$ **г)** $N(f) \leqslant N(f') + 1$ **д)** $L(f(x)) + L((-1)^{\deg f} f(-x)) \leqslant \deg f$ **е)** $N(f) \leqslant L(f)$ **ж)** $N(f) = L(f)$, если все корни f в поле $\mathbb{C}$ вещественны.

M24$\frac{1}{2}$◇3. Сколько вещественных корней у: **а)** $x^3 - 3x^2 - 9x + a$ **б)** $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$

M24$\frac{1}{2}$◇4 (Правило Лопиталя). Пусть функции f и g определены и дифференцируемы всюду в некоторой окрестности точки x_0 за исключением самой этой точки, и при $x \to x_0$ отношение f/g представляет собой неопределённость вида **а)** $0/0$ **б)** ∞/∞. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f'/g'\Big)$ существует и равен $p \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f/g\Big)$ тоже существует и равен p.

M24$\frac{1}{2}$◇5. Остаётся ли правило Лопиталя в силе, если x_0 и/или p равны $\pm\infty$ или ∞?

M24$\frac{1}{2}$◇6. Вычислите: **а)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{tg} x - 1}{x^2}$ **б)** $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^2}$

M24$\frac{1}{2}$◇7 (формула Тейлора - Лагранжа). Докажите, что $\forall\ f \in \mathscr{C}^k[a,b]$ и $\forall\ x, x_0 \in [a,b]$ $f(x) = \dfrac{1}{k!} f^{(k)}(\vartheta) \cdot (x - x_0)^k + \sum\limits_{\nu=0}^{k-1} \dfrac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \cdot (x - x_0)^\nu$ для некоторого ϑ из отрезка с концами в x_0 и x. (Совет: начните с $k = 1, 2, 3, \ldots$)

M24$\frac{1}{2}$◇8*. Заменяя иррациональности подходящими тейлоровскими разложениями (или как-то ещё) вычислите: **а)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$ **б)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1 - x^2}}{x^5}$ **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$ **д)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$

M24$\frac{1}{2}$◇9. Пусть функция f бесконечно дифференцируема в ε-окрестности U точки x_0, и существует такая константа $c \in \mathbb{R}$, что $|f^{(n)}(x)| < c\ \ \forall x \in U$ и $\forall n \in \mathbb{N}$. Постройте степенной ряд вида $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k (x - x_0)^k \in \mathbb{R}[[(x - x_0)]]$, который $\forall x \in U$ абсолютно сходится к $f(x)$.

M24$\frac{1}{2}$◇10. Найдите в $\mathbb{Q}[[x]]$ два степенных ряда, которые при каждом $x \in \mathbb{R}$ абсолютно сходятся к $\sin(x)$ и к $\cos(x)$ соответственно.

M24$\frac{1}{2}$◇11. Рассмотрим ряды $\sin(z)$ и $\cos(z)$ из предыдущей задачи как элементы из $\mathbb{C}[[z]]$, а также ряд $e^z = \sum z^k/k! \in \mathbb{C}[[z]]$. Будут ли все три ряда абсолютно сходиться при любом $z \in \mathbb{C}$? Докажите *формулу Эйлера*: $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ e^{x+iy} = \cos(x) + i\sin(y)$ как комплексные числа.

M24$\frac{1}{2}$◇12 (Канторова лесенка). Существует ли монотонно неубывающая сюръективная непрерывная функция $f : [\,0\,,\,1\,] \longrightarrow [\,0\,,\,1\,]$, у которой всюду за исключением, разве что, нигде не плотного подмножества меры нуль $f'(x)$ существует и равна нулю.

M24$\frac{1}{2}$◇13* (Лейбницева пила). Постройте непрерывную функцию на $[\,0\,,\,1\,]$, не дифференцируемую ни в одной точке.

M24$\frac{1}{2}$◇14*. Пусть $f'(x) \in \mathbb{R}$ существует $\forall x \in [a,b]$. Может ли f' быть всюду разрывна на $[a,b]$?

M24$\frac{1}{2}$◇15*. Функция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема и $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \exists n \in \mathbb{N}$, такое что n-тая производная от f обращается в нуль в точке x. Верно ли, что f — многочлен?