Производная и дифференциал.

Определения и обозначения. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция f называется *дифференцируемой* в точке x_0, если $f(x) = f(x_0) + \alpha \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$, где α — некоторая константа, а $o(t)$ — функция, такая что $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{o(t)}{t} = 0$. Говоря неформально, дифференцируемость означает, что с точностью до бесконечно малой по сравнению с $(x-x_0)$ функции $o(x-x_0)$ разность $f(x) - f(x_0)$ ведет себя как *линейная однородная функция* $\alpha \cdot (x - x_0)$ от разности $(x - x_0)$. Коэффициент α называется *производной* функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$, а линейная однородная функция $\alpha\,(x - x_0)$ называется *дифференциалом* функции f в точке x_0 и обозначается df_{x_0}. Например, функция $y = x$ дифференцируема в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$, её производная $x' \equiv 1$, а дифференциал $dx_{x_0} = (x - x_0)$ в каждой точке x_0. Поэтому, допуская понятную вольность, производную дифференцируемой функции $f(x)$ часто обозначают через $\dfrac{df}{dx}$, имя в виду, что $\dfrac{\alpha\,(x - x_0)}{x - x_0} = \alpha$.

M23◇1°. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Докажите, что она дифференцируема в x_0, если и только если существует конечный предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}\,,$$

причём этот предел, буде он существует, равен $f'(x_0)$.

M23◇2°. Прямая называется *касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $A = (x_0, f(x_0))$, если она является пределом какой-либо последовательности проходящих через A секущих прямых (A, B_n), где $B_n = (x_n, f(x_n))$ и $x_n \to x_0$. Докажите, что если f дифференцируема в x_0, то касательная существует и единственна. Напишите для неё явное уравнение.

M23◇3. На рис. 18 - 1 был изображён график функции $y = f(x)$. Нарисуйте график функции:
а) $y = f'(x)$, **б)** $y = F(x)$, где $F(x)$ такова, что $F(0) = 0$ и $F'(x) = f(x)\ \forall x$.

M23◇4°. Всякая ли дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в точке x_0?

M23◇5°. Всякая ли непрерывная в точке x_0 функция, определённая в некоторой её окрестности, дифференцируема в x_0?

M23◇6. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Дифференцируемы ли в x_0 функции:
а) $f(x) \pm g(x)$, **б)** $\lambda\, f(x)$, где $\lambda = \mathrm{const}$, **в)** $f(x)g(x)$; **г)** $f(x)/g(x)$, где $g(x_0) \neq 0$.
Если да, то выразите их производные в x_0 через $f(x_0)$, $g(x_0)$, $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$.

M23◇7. Пусть $h(x) = f(g(x))$, причём $g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а $f(x)$ дифференцируема в точке $g(x_0)$. Докажите, что $h(x)$ дифференцируема в точке x_0 и выразите $h'(x_0)$ через f, g, f' и g'.

M23◇8. Пусть f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) > 0$. Найдётся ли у точки x_0 такая ε-окрестность, где $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$?

M23◇9 (теорема Ферма). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой ε-окрестности U точки x_0, дифференцируема в точке x_0 и $f(x) \leqslant f(x_0)\ \ \forall\, x \in U$. Вычислите $f'(x_0)$.

M23◇10 (теорема Ролля). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема во всех точках (a, b), и $f(a) = f(b)$. Существует ли точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f'(x_0) = 0$?

M23◇11 (теорема Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех точках (a, b). Всегда ли найдётся такая точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f'(x_0) = \big(f(b) - f(a)\big)\big/(b - a)$?

M23◇12. Верно ли, что для любой дифференцируемой в некоторой окрестности отрезка $[a, b]$ функции f, такой что $f'(a) > 0$, а $f'(b) < 0$, существует $x_0 \in [a, b]$ такое, что $f'(x_0) = 0$?

M23◇13 (теорема Дарбу). Пусть f определена и дифференцируема в некоторой окрестности отрезка $[a, b]$. Верно ли, что $f'(x)$ принимает на $[a, b]$ все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$?