Комплексные числа

Комплексное число — это точка z на плоскости $\mathbb{C}$ с фиксированной системой прямоугольных координат XoY, единичные базисные векторы которой обозначаются $\{\overrightarrow{1},\ \overrightarrow{i}\}$ (см. рис. 22 - 1). С каждым $z\in\mathbb{C}$ свяжем пару координат (x,y) и радиус-вектор $\overrightarrow{oz}=x\cdot\overrightarrow{1}+y\cdot\overrightarrow{i}$, что обычно записывают просто как $z=x+iy$. Действительные числа $\operatorname{Re}z\stackrel{\text{def}}{=}x$, $\operatorname{Im}z\stackrel{\text{def}}{=}y$ и $|z|\stackrel{\text{def}}{=}\sqrt{x^2+y^2}$ называются *вещественной частью*, *мнимой частью* и *модулем* комплексного числа z. Многозначный ориентированный угол[1] луча oz с осью oX называется *аргументом* z и обозначается $\operatorname{Arg}z$. Комплексные числа можно *складывать* и *перемножать*. По определению, при сложении комплексных чисел их радиус-векторы складываются (по правилу параллелограмма), а при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются (так что умножение на фиксированное комплексное число $a:\mathbb{C}\xrightarrow{z\mapsto az}\mathbb{C}$ есть *поворотная гомотетия* на угол $\operatorname{Arg}(a)$ с центром o и коэффициентом $|a|$).

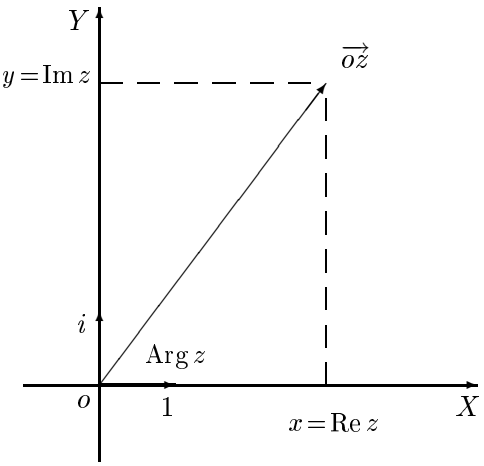

Рис. 22 - 1. Комплексное число.

M22◇1°. Найдите[2] **а)** i^2; **б)** i^3; **в)** $1/i-1$; **г)** $(1+i)^5/(1-i)^3$; **д)** $\left(\sqrt{3}+i/1-i\right)^{30}$; **е)** $\left(i-\sqrt{3}/i-1\right)^{90}$; **ж)** все z с $z^4=-1$; **з)** все z с $z^3=-i$.

M22◇2° (сопряжение). $\overline{z}\stackrel{\text{def}}{=}x-iy$ называется *сопряжённым* к $z=x-iy$; проверьте, что сопряжение перестановочно со сложением и умножением и выразите $1/z$ через $\overline{z}$ и $|z|$.

M22◇3°. Проверьте, что комплексные числа составляют *поле*[3], в которое поле $\mathbb{R}$ с сохранением операций вкладывается в качестве числовой прямой (oX). Вычислите действительную и мнимую части чисел $1/z$, $z+w$ и zw, если $z=x_1+iy_1$, $w=x_2+iy_2$.

M22◇4. Найдите: **а°)** $(5+i)(7-6i)/(3+i)$; **б)** $(1+it)/(1-it)$ с $t\in\mathbb{R}$.

M22◇5°. Решите ур-я: **а)** $z^2+(2i-7)z+(13-i)=0$ **б)** $(z+i)^3+(z-i)^3=0$ **в)** $\overline{z}=z^3$

M22◇6°. Пусть $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $w=\cos\beta+i\sin\beta$. Вычислите геометрически и путём раскрытия скобок действительную и мнимую части чисел **а)** zw **б)** z^2 **в)** z^3 **г)** z^4 и получите отсюда тригонометрические формулы «сложения аргуметов» и «кратных углов».

M22◇7. Решите в $\mathbb{C}$ уравнение $z^5=1$ и вычислите $\cos\left(2\pi/5\right)$ и $\sin\left(2\pi/5\right)$ в радикалах.

M22◇8. Куда отображения **а)** $z\longmapsto z^2$ **б)** $z\longmapsto 1/z$ переводят декартову и полярную координатную сетки, окружность $|z+i|=1$ и кошечку с рис. 18 - 2?

M22◇9. Вычислите суммы: **а)** $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$ и $1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$
б) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots$ **в)** $\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\cdots$ **г)** $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots$
д) $2\sin x+3\sin 2x+\cdots+n\sin(n-1)x$ и $1+2\cos x+3\cos 2x+\cdots+n\cos(n-1)x$
е) $1+2\zeta+3\zeta^2+\cdots+n\zeta^{n-1}$, где $\zeta=\cos\left(2\pi/n\right)+i\sin\left(2\pi/n\right)$

M22◇10. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ вычислите сумму и произведение s-тых степеней всех комплексных корней уравнения $z^n=1$ при $s=1,\ 2,\ 3\ \ldots$.

---

[1] напомним(см. **Лст. № 21**), что с точностью до любого целого числа оборотов он равен ориентированной длине дуги, которую надо пройти по единичной окружности от луча $[oX)$ до луча $[oz)$, т. е. $\operatorname{Arg}z=\{\varphi+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\}$, где φ — это радианная мера ориентированного угла $\widehat{xoz}$, а k — любое целое число

[2] в этом листке «найдите z» означает «нарисуйте и вычислите $\operatorname{Re}z$, $\operatorname{Im}z$, $|z|$ и $\operatorname{Arg}z$»

[3] т. е. что сложение и умножение подчиняются переместительному, сочетательному и распределительному законам, а уравнения $a+z=b$ и $cz=d$ при любых заданных a, b, d и $c\neq 0$ единственным образом разрешимы относительно z