Длина окружности и площадь круга

M21◇1°. У какого из выпуклых многоугольников $M_1 \subset M_2$ меньше площадь и периметр?

Обозначения. Разбиение $\boldsymbol{p}$ данной дуги AB на данной окружности с центром O — это набор точек $\boldsymbol{p} = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\} \subset AB$, расположенных на дуге так, что $P_0 = A$, $P_n = B$, и при всех $i = 1, 2, \ldots, (n-1)$ точка P_i лежит строго между P_{i-1} и P_{i+1}. Ломаная $P_0P_1P_2\ldots P_n$ называется *вписанной ломаной* разбиения $\boldsymbol{p}$, её длина обозначается через $\ell(\boldsymbol{p})$, а длина самой длиной её стороны — через $\lambda(\boldsymbol{p})$ (она называется *мелкостью* разбиения $\boldsymbol{p}$). Многоугольник $OP_0P_1P_2\ldots P_n$ называется *внутренним многоугольником* разбиения $\boldsymbol{p}$, а его площадь обозначается $S(\boldsymbol{p})$.

M21◇2. Для любых разбиений $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ постройте разбиение $\boldsymbol{p}$, содержащее как $\boldsymbol{p}_1$, так и $\boldsymbol{p}_2$, и докажите, что множества значений $\ell(\boldsymbol{p})$ и $S(\boldsymbol{p})$ при всевозможных $\boldsymbol{p}$ ограничены сверху.

Определения. $\ell(AB) \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{\boldsymbol{p}} \ell(\boldsymbol{p})$ называется *линой дуги*, а $S(AOB) \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{\boldsymbol{p}} S(\boldsymbol{p})$ — *площадью сектора*.

M21◇3°. Пусть $AC = AB \cup BC$, и $AB \cap BC = B$. Выразите $\ell(AC)$ и $S(AOC)$ через $\ell(AB)$, $\ell(BC)$, $S(AOB)$ и $S(BOC)$.

M21◇4°. Докажите, что отношение $\ell(AB)$ к радиусу и к длине полуокружности, а также отношение $S(AOB)$ к квадрату радиуса, зависят только от величины угла AOB, но не от радиуса окружности и положения дуги на ней.

M21◇5. Покажите, что $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, такое что для всякого разбиения $\boldsymbol{p}$ мелкости $\lambda(\boldsymbol{p}) < \delta$ обе погрешности $|\ell(AB) - \ell(p)|$ и $|S(AOB) - S(p)|$ не превышают ε.

M21◇6. Выразите площадь сектора через длину дуги и радиус.

Радианная мера угла показывает, какую часть составляет этот угол от развёрнутого угла π. Точнее, длина полуокружности единичного радиуса обозначается через π, и если отношение длины дуги AB к длине полуокружности того же радиуса равно ϑ, то говорят, что дуга AB (и центральный угол AOB) составляют $\vartheta\pi$ радиан. Подчеркнём, что $\vartheta\pi \in \mathbb{R}$.

M21◇7 (архимедово вычисление числа π). Пусть p_n — это разбиение полуокружности радиуса 1 на 2^n равных дуг, и $\lambda_n \overset{\text{def}}{=} \lambda(p_n)$, $\ell_n \overset{\text{def}}{=} \ell(p_n)$, $S_n \overset{\text{def}}{=} S(p_n)$. Выразите λ_n, ℓ_n и S_n через λ_{n-1} и представьте λ_n как $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2}}}}}$ (сколько тут радикалов?). Используя только четыре арифметических действия и извлечение квадратных корней[1], вычислите число π с точностью до 2-го знака после запятой.

Универсальное накрытие окружности и тригонометрические функции. Сопоставим каждому числу $t \in \mathbb{R}$ точку на единичной окружности $S^1 \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, получающуюся откладыванием от точки $(1, 0)$ дуги длины $|t|$ по ЧС, если $t < 0$, и против ЧС, если $t > 0$ (иначе говоря, числовая прямая $\mathbb{R}^1$, ориентированная также, как ось OY, приставляется своим нулём $0 \in \mathbb{R}^1$ к точке $(1, 0) \in S^1$ и затем наматывается на S^1, как нерастяжимая нитка на катушку). Числа $t \in \mathbb{R}$, отличающиеся на целое число оборотов (т.е. на целые кратные 2π), перейдут при этом в одну и ту же точку окружности. Набор чисел $t \in \mathbb{R}$, переходящих в данную точку $P = (x, y)$, называется *аргументом* точки[2] P и обозначается $\operatorname{Arg}(P)$, а координаты (x, y) точки P называются *косинусом* и *синусом* числа $t \in \mathbb{R}$. Функции $\cos t \overset{\text{def}}{=} x$, $\sin t \overset{\text{def}}{=} y$, $\operatorname{tg} t \overset{\text{def}}{=} \sin t / \cos t$, $\operatorname{ctg} t \overset{\text{def}}{=} \cos t / \sin t$, $\sec t \overset{\text{def}}{=} 1 / \cos t$ и $\operatorname{cosec} t \overset{\text{def}}{=} 1 / \sin t$ называются *тригонометрическими* функциями числа $t \in \mathbb{R}$. Из этих определений вытекают *основные тригонометрические тождества*: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, $\operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t - 1$, $\operatorname{ctg}^2 t = \operatorname{cosec}^2 t - 1$.

M21◇8. Вычислите: **а)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ **б)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$ **в)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ **г)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ **д)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x \sin(2x)}$

M21◇9. Все ли тригонометрические функции непрерывны[3] всюду, где определены?

---

[1] можете, по немощи своей, использовать тут машинку, которой, однако, у Архимеда не было

[2] или *многозначным ориентированным углом* луча OP с осью OX

[3] совет: начните с синуса