Непрерывные функции

Определения. Пусть функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ определена на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$, и $x_0 \in X$ является предельной точкой этого множества. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, т. е. если $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \quad \forall x \in X \quad |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Функция $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется *непрерывной* на данном множестве, если она определена и непрерывна в каждой точке этого множества.

М20◇1. Проверьте (с явным отысканием δ по ε в каждой точке), что функции $y = 5\,x^2$ и $y = \sqrt[3]{x}\big/2$ непрерывны во всех точках числовой прямой.

М20◇2. Верно ли, что f непрерывна в $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда для любой сходящейся к x_0 последовательности (a_n) выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$?

М20◇3. Сформулируйте на ε - δ языке то, что функция f разрывна в точке x_0.

М20◇4. Существует ли функция $[\,0\,,\,1\,] \xrightarrow{f} [\,0\,,\,1\,]$ которая **а)** разрывна во всех точках; **б)** непрерывна в единственной точке $x_0 = 1\big/2$; **в)** то же, но монотонно неубывает ; **г)** непрерывна во всех точках $1\big/k$ с $k \in \mathbb{N}$ и только в них;

М20◇5*. Существует ли функция непрерывная во всех иррациональных точках и разрывная во всех рациональных?

М20◇6. Пусть функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ непрерывна в $x_0 \in X$ и $f(x_0) \neq 0$. Всегда ли у точки x_0 есть такая ε-окрестность D, что функция $y = 1\big/f(x)$ определена всюду в $D \cap X$ и тоже непрерывна в точке x_0 ?

М20◇7 (инерция знака). Докажите, что в предыдущей задаче окрестность D можно подобрать так, чтобы функция $f(x)$ имела во всех точках $D \cap X$ тот же знак, что и $f(x_0)$.

М20◇8. Сформулируйте и докажите теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух непрерывных функций.

М20◇9. Функция $y = \big(f(x)\big)^2$ непрерывна на $[\,0\,,\,1\,]$. Может ли при этом функция $y = f(x)$ быть разрывна: **а)** всюду; **б)** всюду кроме оной точки; **в)** ровно в одной точке ?

М20◇10 (топологическое определение непрерывности). Докажите, что функция $U \xrightarrow{f} V$ между двумя открытыми множествами $U, V \subset \mathbb{R}$ всюду непрерывна тогда и только тогда, когда полный прообраз $f^{-1}(W) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in U \mid \ f(u) \in W\}$ любого открытого подмножества $W \subset V$ открыт.

М20◇11. Верно ли, что всюду непрерывная функция $U \xrightarrow{f} V$ между двумя открытыми множествами $U, V \subset \mathbb{R}$ переводит компактные подмножества $K \subset U$ в компактные?

М20◇12 (свойства непрерывных функций на отрезке). Пусть функция f определена и непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$. Верно ли, что множество значений $f([a, b])$: **а)** ограничено; **б)** содержит свои твг и тнг ; **в)** является отрезком; **г)** $\forall\, \alpha, \beta \in [a, b]$ оно содержит все числа c, лежащие между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$.

М20◇13. Докажите, что уравнение $f(x) = 0$, где f — любой многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами, всегда имеет действительное решение.

М20◇14. Математический маятник представляет собой точечный груз массы m подвешенный в однородном вертикальном поле тяжести на конце невесомго абсолютно твёрдого отрезка, способного без трения вращаться в фиксированной вертикальной плоскости вокруг другого своего конца. Маятник без толчка отпускают из положения, составляющего с горизонталью угол α_0. Через 5 мин он оказался с горизонталью под углом α_1. Является ли α_1 непрерывной функцией от α_0 и можно ли подобрать α_0 так, чтобы $\alpha_1 = 60°$?