Предел функции

Предел функции. Пусть функция f определена на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ является его предельной точкой. Число p называется *пределом* функции f при $x \to x_0$ (обозначение: $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать число $\delta > 0$ так, чтобы в каждой отличной от x_0 точке $x \in D_\delta(x_0) \cap X$ значение $f(x)$ принадлежало бы $D_\varepsilon(p)$. Более формально:

$$p = \lim_{x \to x_0} f(x) \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ \forall\, x \in X \quad \Big(x \neq x_0 \quad \& \quad |x - x_0| < \delta \Big) \Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon$$

М19◇1°. Верно ли, что $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ тогда и только тогда, когда для любой сходящейся к x_0 последовательности $(a_n) \subset X$ последовательность $b_n = f(a_n)$ сходится к p? Если да, объясните, почему, если нет, скажите, что надо исправить, чтобы получилась верная теорема.

М19◇2. Вычислите (с явным отысканием δ по ε) : **а)** $\lim\limits_{x \to 3} 4x$; **б)** $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{x-1}$;
в) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^k - 1}{x - 1}$, $k \in \mathbb{N}$; **г)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{-k} - 1}{x - 1}$, $k \in \mathbb{N}$; **д)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$; **е)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{1/3} - 1}{x - 1}$.

М19◇3°. Пусть функции f, g обе определены на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ является его предельной точкой, и существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = p$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = q$. Сформулируйте и докажите теоремы о пределах (при $x \to x_0$) функций:
а) $cf(x)$, где c – константа; **б)** $f(x) \pm g(x)$; **в)** $f(x) \cdot g(x)$; **г)** $f(x) / g(x)$.

М19◇4. Пусть функция $y = g(x)$ определена на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ является его предельной точкой, существует $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$, и этот y_0 является предельной точкой для некоего множества $Y \supset g(X)$, на котором задана другая функция $z = f(y)$ с $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = z_0$. Верно ли, что $z_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f\big(g(x)\big)$? Если да, объясните, почему, если нет, скажите, что надо исправить, чтобы получилась верная теорема.

М19◇5°. Дайте формальное определение тому, что $f(x) \to p$ при x, стремящемся к x_0 *слева* или *справа* (обозначения: $x \to x_0 - 0$ или $x \nearrow x_0$, и соответственно, $x \to x_0 + 0$ или $x \searrow x_0$).

М19◇6°. Дайте формальное определение тому, то $f(x) \to p$ при $x \to \infty$, а также при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, в каждом из случаев: **а)** $p \in \mathbb{R}$, **б)** $p = \infty$, **в)** $p = +\infty$, **г)** $p = -\infty$,

М19◇7. Пусть $f(x) \to \infty$ при $x \to 0$. Можно ли что-то сказать про $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{f\left(1/x\right)}$?

М19◇8. Вычислите: **а)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$, где $m, n \in \mathbb{N}$; **б)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$;
в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; **г)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{(x+5)(x-7)} - x \right)$; **д)** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{1 - \sqrt{x}} - \dfrac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right)$;
е) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right)$; **ж)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \right)$.

Асимптоты. Прямая, заданная уравнением $y = ax + b$, называется (*наклонной*) *асимптотой*[1] графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (соотв. при $x \to -\infty$), если $f(x)$ определена при всех $x \gg 0$ (соотв. $x \ll 0$) и $|ax + b - f(x)| \to 0$ при $x \to +\infty$ (соотв. $x \to -\infty$). Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* при x, стремящемся к x_0 слева (соотв. справа), если $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \infty$ (соотв. $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = \infty$).

М19◇9. Нарисуйте (с точным указанием всех асимптот) графики функций: **а)** $x + 1/x$;
б) $x^2 + 1/x$; **в)** $\dfrac{x+3}{2-x}$; **г)** $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$; **д)** $\dfrac{(x+1)(x-2)(x+3)}{x^2 + 1}$; **е)** $\sqrt{x(1+x)}$.

М19◇10*. Нарисуйте траекторию точки, координаты которой зависят от времени $t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ по закону: **а)** $x = t + 1/t$, $y = t^2 + 1/t$; **б)** $x = t^2/(t-1)$, $y = t/(t^2 - 1)$.

---

[1] асимптоты с $a = 0$ называются так же *горизонтальными*