Пределы последовательностей

М17◇1 (теоремы Больцано–Вейерштрасса). Любая ли ограниченная последовательность:
а) имеет предельную точку? **б)** содержит подпоследовательность, имеющую предел?
в) если монотонно неубывает (или монотонно невозрастает), то имеет предел?

М17◇2. Пусть (a_n) и (b_n) имеют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$. Докажите, что
а) $a_n \pm b_n$, **б)** $a_n \cdot b_n$, **в)** $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$, а если $\beta \neq 0$, то и **г)** $1/b_n$, **д)** a_n/b_n тоже сходятся, и выразите их пределы через α и β.

М17◇3. Вычислите пределы (при $n \to \infty$) или докажите расходимость последовательностей:
а) $(3n^3 - 5n + 7)/(5n^3 + 7n^2 - 11)$; **б)** $\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 - 5n}$; **в)** $\sqrt{n^2 + 2n^3} - \sqrt{2n^2 + n^3}$;
г) $\sqrt[n]{n!}$; **д*)** $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$; **е*)** $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ радикалов}}$; **ж*)** $(1 - 1/n)^n$; **з*)** $(1 + 3/n)^n$.

М17◇4. Будем называть *перемешиванием* последовательности $\mathbb{N} \xrightarrow{a} \mathbb{R}$ её композицию с произвольным взаимно однозначным отображением $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Влияет ли перемешивание на сходимость/расходимость и значение предела (в том числе, когда $a_n \to \pm\infty, \infty$)?

М17◇5 (критерий Коши). Последовательность a_n называется *последовательностью Коши*, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon\ \forall\, n_1, n_2 > N$. Докажите, что последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши.

Пополнение по Коши. Две последовательности Коши (a_n) и (b_n) называются *эквивалентными*, если любое перемешивание последовательности $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ тоже является последовательностью Коши. Действительным числом Коши называется класс эквивалентных рациональных последовательностей Коши $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$. Множество всех таких классов обозначается $\overline{\mathbb{Q}}$ и называется *пополнением* $\mathbb{Q}$.

М17◇6*. Не прибегая к языку БДД, дайте определение суммы, произведения и отношения «$<$» на множестве $\overline{\mathbb{Q}}$, после чего **а)** докажите теорему о полноте множества $\overline{\mathbb{Q}}$,
б) постойте сохраняющий арифметические операции и порядок изоморфизм $\overline{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$.

Абсолютная и условная сходимость рядов. Ряд $\sum\limits_{i\geqslant 1} a_i$ произвольных чисел $a_i \in \mathbb{R}$ называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ имеет конечный предел (он называется *суммой ряда*). Сходящийся ряд называется *абсолютно сходящимся*, если его ряд абсолютных величин $\sum\limits_{i\geqslant 1} |a_i|$ тоже сходится; в противном случае ряд называют *условно сходящимся*.

М17◇7. Убедитесь, что для ряда неотрицательных чисел новое определение сходимости, данное в этом листке, согласуется с определением из позапрошлого листка.

М17◇8. Чему равен $\lim\limits_{i\to\infty} a_i$, если ряд $\sum\limits_{i\geqslant 0} a_i$ сходится?

М17◇9. Сходится ли ряд $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$ **а)** абсолютно? **б)** условно?

М17◇10 (критерий Коши). Докажите, что ряд $\sum\limits_{i\geqslant 1} a_i$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall\, \varepsilon > 0\quad \exists\, N \in \mathbb{N} : |a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}| < \varepsilon$ для всех номеров $n_2 > n_1 > N$.

М17◇11*. Докажите, что при помощи подходящего перемешивания слагаемых условно сходящегося ряда его сумму можно сделать равной любому наперёд заданному числу, а также сделать ряд расходящимся.

М17◇12. Можно ли перемешать слагаемые ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ так, чтоб он стал сходиться?

М17◇13. Изменяется ли сумма абсолютно сходящегося ряда при перемешивании слагаемых?