Последовательности

Последовательность элементов множества X — это отображение $\mathbb{N} \xrightarrow{x} X$. Вместо $x(n)$ обычно пишут x_n и называют его *n-тым членом* последовательности. Последовательность x_1, x_2, x_3, … коротко обозначается через (x_n). Отметим, что *последовательность* не следует путать с *множеством* её значений, и неверно думать о последовательности как о «занумерованном множестве». Всюду в этом листке речь будет идти о *числовых* последовательностях, т. е. о последовательностях $\mathbb{N} \xrightarrow{x} \mathbb{R}$.

М16◇1°. Дайте определения числовых последовательностей: **а)** ограниченной; **б)** неограниченной; **в)** монотонно возрастающей; **г)** монотонно невозрастающей.

М16◇2. Изобразите последовательности и исследуйте их на ограниченность и монотонность:

а) $x_n = 1$; **б)** $x_n = n$; **в)** $x_n = (-1)^n/n$; **г)** $0,\ 1/2,\ 0,\ 1/3,\ 0,\ 1/4,\ \ldots$;
д) $x_n = (n-3)/(2n+5)$; **е)** $x_n = (n^2+1)/(2n+1)$; **ж)** $x_n = (n+1)/(2n^2-1)$.

М16◇3. Дайте определение *подпоследовательности* последовательности x_1, x_2, x_3, … .

Пределы. Число p называется *пределом* последовательности (x_n), если любая его ε-окрестность $D_\varepsilon(p)$ содержит все члены этой последовательности, кроме конечного числа; более формально это записывается так: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \quad |x_n - p| < \varepsilon$. Обозначение: $p = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \to p$ при $n \to \infty$. Последовательность, у которой есть предел, называется *сходящейся*, а у которой нет — *расходящейся*.

М16◇4°. Без отрицаний скажите, что значит, что $q \in \mathbb{R}$ не есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и что значит, что (x_n) расходится. Бывают ли неограниченные сходящиеся последовательности?

М16◇5°. Может ли последовательность не иметь ни одного или иметь несколько пределов?

М16◇6. Выясните, какие из последовательностей сходятся и для сходящихся найдите предел и явно укажите для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ какой-либо номер N, после которого все x_n заведомо лежат в ε-окрестности предела **а)** $1/2,\ -1,\ 1/4,;\ -1/3,\ 1/8,\ -1/5,\ \ldots$;
б) $1/n$; **в)** $(-1)^n$; **г)** $2^n/n!$; **д)** $\left((-1)^n \cos n\right)/n^2$; **е)** $n/(n^2+1)$; **ж)** q^n, $q \in \mathbb{R}$;
з) $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, $q \in \mathbb{R}$; **и)** $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; **к)** $\sqrt{n^2+n} - n$;; **л)** $(n^a)/(b^n)$; **м*)** $\sqrt[n]{n}$.

М16◇7*. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + {}^1\!/\!{}_n\right)^n = e$ (число e определялось в зад. М15◇7).

М16◇8°. Дайте определение тому, что при $n \to \infty$ **а)** $a_n \to +\infty$, **б)** $a_n \to -\infty$, **в)** $a_n \to \infty$. Верно ли, что $(a_n) \to \infty \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-1} = 0$?

М16◇9. Можно что-либо утверждать о сходимости последовательностей: $a_n \pm b_n$; $a_n \cdot b_n$ b_n/a_n; a_n/b_n (у двух последних предполагается, что $a_n, b_n \neq 0\ \forall\ n \gg 0$), если известно, что последовательность b_n ограничена, а a_n стремится **а)** к 0 **б)** к ∞?

Предельные точки. Число p называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если любая его ε-окрестность $D_\varepsilon(p)$ содержит бесконечно много членов этой последовательности; иначе это записывается так: $\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant N : |x_n - p| < \varepsilon$.

М16◇10°. Убедитесь, что эти два определения действительно эквивалентны. Обязана ли предельная точка быть пределом? А предел — предельной точкой?

М16◇11. Может ли множеством всех предельных точек последовательности быть:

а) $\varnothing$? **б)** n различных точек ($n = 1,\ 2,\ \ldots$)? **в)** $\mathbb{Z}$? **г)** $\mathbb{Q}$? **д)** $\mathbb{R}$?

М16◇12. У последовательности (a_n) нет предельных точек. Верно ли, что $a_n \to \infty$?

М16◇13. Обязана ли сходиться **а)** произвольная **б)** ограниченная последовательность, у которой есть ровно одна предельная точка?

М16◇14. Известно, что слева или справа от любого $x \in \mathbb{R}$ лежит лишь конечное число членов последовательности (a_n). Верно ли, что (a_n) либо сходится либо стремится к $\pm\infty$?