Получение оценок

МатАн есть искусство получения точных результатов посредством грубых, приближённых оценок
(из профессорско-преподавательского фолькльора)

М15◇1 (неравенство Бернулли). Верно ли, что $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\,\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и произвольного действительного $\alpha > -1$?

М15◇2. Укажите какое-нибудь[1] $m \in \mathbb{N}$, чтобы при всех целых $n \geqslant m$ выполнялась оценка:
а) $1000 \cdot 2^n < n!$; **б)** $100 \cdot n^2 < 2^n$; **в)** $10 \cdot n^3 < 2^n$; **г)** $n^{10} < 2^n$; **д)** $(1+10^{-2005})^n > 10^{2006}$; **е)** $(1-10^{-2006})^n < 10^{-2007}$; **ж)** $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+n} > \frac{1}{2}$.

Оценки функций. Функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, заданная на некотором множестве X, называется *ограниченной сверху* (соотв. *ограниченной снизу* и просто *ограниченной*) на X, если таковым является множество её значений $f(X) \subset \mathbb{R}$. Иначе говоря, f ограничена сверху, если $\exists\, c \in \mathbb{R}: \ \forall x \in X \ f(x) < c$; f ограничена снизу, если $\exists\, c \in \mathbb{R}: \ \forall x \in X \ f(x) > c$; f ограничена, если $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}: \ \forall x \in X \ c_1 < f(x) < c_2$.

М15◇3. Исследуйте каждую из функций: $x^3 - 10\,x$, $y = \frac{x^3-x+1}{x^4+1}$ $y = \frac{x^4-x+1}{x^4+1}$ $y = \frac{x^5-x+1}{x^4+1}$ на ограниченность **а)** на отрезке $[-100, 100]$; **б)** на всей прямой.

М15◇4. Какие из перечисленных ниже функций ограничены на своей области определения и с какой стороны: **а)** $y = \sqrt{x^2+1} - x$; **б)** $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$; **в)** $y = \frac{5\,x}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}$; **г)** $y = \frac{3+2x}{3x-2}$.

М15◇5. Ограничены ли сверху последовательности: **а)** $a_n = \binom{100}{n} \cdot n^{-100}$ **б)** $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$?

Оценки рядов. Бесконечные суммы типа $\sum\limits_{\nu \geqslant 1} a_\nu = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ называются *рядами*. Конечная сумма первых m членов такого ряда $s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ называется его *частичной суммой*. Ряд *неотрицательных* действительных чисел называется *сходящимся*, если множество значений его частичных сумм ограничено сверху; твг этого множества называется *суммой* ряда. Если частичные суммы не ограничены, то говорят, что ряд *расходится*.

М15◇6. Докажите, что ряды сходятся и найдите их суммы: **а)** $\sum\limits_{n \geqslant 1} q^n$ (с $0 < q < 1$) **б)** $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{n+1}{2^n}$ **в)** $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{2n-1}{2^n}$ **г)** $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ **д)** $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ **е)** $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ **ж)** $\sum\limits_{n \geqslant 1} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$

М15◇7 (число e). Докажите, что число $e \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \cdots$
а) существует; **б)** удовлетворяет неравенствам $2{,}7 < e < 2{,}8$; **в*)** иррационально.

М15◇8 (гармонический ряд). Сходится ли ряд: $\sum\limits_{k \geqslant 1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$?

М15◇9. Сходиться ли ряд, составленный из квадратов членов гармонического ряда?

М15◇10*. Из гармонического ряда выкинули все слагаемые, в десятичной записи которых участвует цифра 9. Могут ли частичные суммы остальных слагаемых превысить 100?

М15◇11* (задача о полоскании белья). Имеется 10 *кг* грязного белья и 10 *кг* чистой воды. При погружении любой части белья в любое количество воды грязь распределяется в их общей массе равномерно. Можно ли уменьшить количество грязи в белье более, чем
а) в 2 раза? **б)** в 3 раза? **в)** в 179 раз?

Окрестности. Для любого вещественного $\varepsilon > 0$ под ε-окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ понимается открытый интервал $D_\varepsilon(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{\, x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \,\}$.

М15◇12. Верно ли, что любая ε-окрестность любого числа содержит бесконечно много рациональных чисел?

М15◇13. Можно ли покрыть множество $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ системой интервалов, суммарная длина которых меньше любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$?

---

[1] подчеркнём, что «какое-нибудь» вовсе не означает «как можно меньшее»