Замкнутые, компактные, несчётные и континуальные множества.

Замкнутые множества. Множество $Z \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки[1]. Непустые ограниченные замкнутые множества называются *компактами*.

М$15\frac{2}{3}\diamond 1^\circ$. Замкнуты ли множества **а)** $[\,0\,,\,1\,]$ **б)** $[\,0\,,\,1\,)$ **в)** $[\,0\,,\,\infty\,)$ **г)** $(\,0\,,\,\infty\,)$ **д)** $\mathbb{R}$.

М$15\frac{2}{3}\diamond$2. Перечислите все одновременно открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{R}$.

М$15\frac{2}{3}\diamond$3. Равносильна ли замкнутость множества $Z \subset \mathbb{R}$ открытости его дополнения $\mathbb{R} \setminus Z$?

М$15\frac{2}{3}\diamond$4. Бывают ли дискретные **а)** незамкнутые множества? **б)** бесконечные компакты?

М$15\frac{2}{3}\diamond$5. Можно ли представить отрезок в виде объединения двух его непересекающихся непустых замкнутых подмножеств?

М$15\frac{2}{3}\diamond$6. Замкнуто ли пересечение любого набора замкнутых множеств?

М$15\frac{2}{3}\diamond$7. Замкнуто ли объединение **а)** конечного **б)** любого набора замкнутых множеств?

М$15\frac{2}{3}\diamond$8 (лемма о вложенных компактах). Докажите, что любая последовательность вложенных компактов $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$ имеет непустое пересечение: $\bigcap K_\nu \neq \varnothing$.

М$15\frac{2}{3}\diamond 9^*$ (лемма о конечном покрытии). Докажите, что $K \subset \mathbb{R}$ компакт тогда и только тогда, когда любое его покрытие интервалами содержит конечное подпокрытие.

Канторово множество. Определим по индукции последовательность вложенных компактов $K_\nu \subset [0,1]$, в которой $K_0 = [0,1]$, а $K_{\nu+1} \subset K_\nu$ (для всех $\nu \geqslant 0$) является объединением 2^ν отрезков и получается из K_ν выкидыванием открытой средней трети из каждого отрезка, входящего в K_ν. Пересечение $\mathfrak{K} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\limits_\nu K_\nu$ называется *канторовым множеством*. Иначе $\mathfrak{K} \subset [0,1]$ можно описать как множество всех чисел $\varkappa \in [0,1]$, которые можно записать троичной дробью, не содержащей 1 (не обязательно стандартной).

М$15\frac{2}{3}\diamond$10. Есть ли у $\mathfrak{K}$ **а)** изолированные **б)** внутренние точки?

М$15\frac{2}{3}\diamond$11. Есть ли у $\mathfrak{K}$ конечное покрытие интервалами сколь угодно малой суммарной длины?

Несчётность и континуальность. Множество называется *несчётным*, если оно бесконечно и не счётно. Про множество, равномощное единичному отрезку говорят, что оно имеет *мощность континуума*.

М$15\frac{2}{3}\diamond$12. Всегда ли $N \setminus M$ равномощно N, если M счётно, а N несчётно?

М$15\frac{2}{3}\diamond$13. Можно ли нарисовать несчётное множество попарно непересекающихся
а) интервалов на прямой? **б*)** восьмёрок[2] на плоскости? **в*)** букв T на плоскости?

М$15\frac{2}{3}\diamond$14. Имеют ли мощность континуума: **а)** множество бесконечных слов из букв a и б; **б)** любой отрезок; **в)** любой интервал; **г)** $\mathbb{R}$; **д)** $\mathfrak{K}$; **е)** любой квадрат; **ж)** любой куб; **з)** множество бесконечных последовательностей вещественных чисел?

М$15\frac{2}{3}\diamond$15. Континуальна ли мощность **а)** иррациональных[3] **б)** трансцендентных[4] чисел?

Конденсация несчётных множеств. Элемент $a \in M$ произвольного несчётного множества $M \subset \mathbb{R}$ называется его *точкой конденсации*, если $D_\varepsilon(a) \cap M$ несчётно $\forall\, \varepsilon > 0$.

М$15\frac{2}{3}\diamond 16^*$. Может ли множество точек $b \in M$, не являющихся точками конденсации M, быть несчётно?

М$15\frac{2}{3}\diamond 17^*$. Может ли множество точек конденсации иметь изолированные точки?

М$15\frac{2}{3}\diamond 18^*$. Верно ли, что множество точек конденсации всегда замкнуто?

М$15\frac{2}{3}\diamond 19^*$ (континуум-гипотеза для замкнутых множеств). Докажите, что любое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$ или пусто, или конечно, или счётно, или имеет мощность континуума.

---

[1] в частности, если их у него вообще нет

[2] *восьмёркой* называется любая пара соприкасающихся внешним образом окружностей

[3] число $r \in \mathbb{R}$ называется *рациональным*, если $\exists\ k \in \mathbb{N} : kr \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$; числа не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*

[4] число называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами; числа, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*