Окрестности, покрытия и предельные точки

М$15\frac{1}{2}$◇1 (лемма о вложенных отрезках). Имеется последовательность отрезков, каждый из которых содержится в предыдущем. Может ли пересечение всех этих отрезков быть пустым?

М$15\frac{1}{2}$◇2. Изменится ли ответ, если отрезки заменить интервалами?

М$15\frac{1}{2}$◇3. Улитка в течение 6 часов (неравномерно) ползла по прямой, находясь под непрерывным наблюдением группы естествоиспытателей. Каждый из них следил за улиткой ровно 1 час без перерывов и зафиксировал, что за этот час она переместилась ровно на 1 *м*. Могла ли улитка за всё время эксперимента переместиться **а)** на 5 *м*? **б)** на 10 *м*? **в)** на 12 *м*?

М$15\frac{1}{2}$◇4. Отрезок S покрыт интервалами. Всегда ли возможно удалить часть из них так, чтобы остальные тоже покрывали S и

а) (лемма о конечном покрытии) их было бы конечное число?

б) каждая точка $x \in S$ накрывалась бы не более, чем двумя интервалами?

М$15\frac{1}{2}$◇5. Отрезок S длины ℓ покрыт **а)** конечным **б)** любым набором отрезков, содержащихся в S. Всегда ли возможно выкинуть часть из них так, чтобы остальные тоже покрывали S и имели суммарную длину $\leqslant 2\ell$?

М$15\frac{1}{2}$◇6. Что изменится, если в предыдущих двух задачах заменить отрезок на интервал?

Внутренние точки и открытые множества. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *внутренней точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если у неё есть ε-окрестность, целиком содержащаяся в M. Множество называется *открытым*, если все его точки — внутренние. Иначе говоря, $U \subset \mathbb{R}$ открыто, если $\forall u \in U \;\; \exists \varepsilon > 0 : D_\varepsilon(u) \subset U$ (величина ε может зависеть от точки u). Пустое множество тоже, по определению, считается открытым.

М$15\frac{1}{2}$◇7°. Убедитесь, что промежутки $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ и (a, b) открыты. Можно ли разбить интервал в объединение двух непересекающихся открытых множеств?

М$15\frac{1}{2}$◇8. Верно ли, что объединение любого набора открытых множеств открыто?

М$15\frac{1}{2}$◇9. Всякое ли пересечение **а)** конечного **б)** любого набора открытых множеств открыто?

М$15\frac{1}{2}$◇10. Всякое ли открытое множество на прямой является объединением конечного или счётного набора *попарно непересекающихся* интервалов, в числе которых допускаются и неограниченные интервалы вида $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$?

Изолированные точки и дискретные множества. Точка $a \in M$ называется *изолированной точкой* множества M, если некоторая её ε-окрестность не содержит никаких других точек из M. Множество, все точки которого изолированы, называется *дискретным*.

М$15\frac{1}{2}$◇11. Есть ли бесконечные дискретные **а)** ограниченные **б)** несчётные множества?

М$15\frac{1}{2}$◇12*. Постройте открытое $U \subset [\,0\,,\,1\,]$ **а)** длины $\leqslant \frac{1}{2}$ **б*)** сколь угодно малой длины , такое чтобы у дополнения $[\,0\,,\,1\,] \smallsetminus U$ не было бы ни внутренних, ни изолированных точек.

Предельные точки. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если *любая* её ε-окрестность $D_\varepsilon(x_0)$ содержит какую-нибудь точку $x \in M$, отличную от x_0.

М$15\frac{1}{2}$◇13°. Может ли дискретное множество M иметь предельную точку, и если да, то может ли такая точка принадлежать M?

М$15\frac{1}{2}$◇14°. Постройте бесконечное множество $M \subset \mathbb{R}$, множество предельных точек которого: **а)** пусто; **б)** состоит из одной точки; **в)** состоит из двух точек; **г)** совпадает с $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

М$15\frac{1}{2}$◇15. Всякая ли предельная точка множества предельных точек множества M является предельной для самого множества M?

М$15\frac{1}{2}$◇16. Может ли бесконечное ограниченное множество не иметь предельных точек?