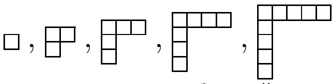
Геометрическое суммирование

... Достопочтеннейший Дионисий, зная что ты ревностно хочешь научиться решению задач, касающихся чисел, я попытался изложить природу их и могущество, начиная с тех оснований, на которых покоится эта наука... Все числа, как ты знаешь, состоят из некоторого количества единиц; ясно, что они продолжаются, увеличиваясь, до бесконечности. Так вот, среди них находятся: квадраты, получающиеся от умножения некоторого числа самого на себя — число же это называется стороной квадрата; затем кубы... Каждое из возрастающих от единицы чисел, начиная с трёх, является первым после единицы многоугольником и имеет столько углов, сколько в нём содержится единиц, стороной же его будет 2. Так, 3 будет треугольником, 4 — четырёхугольником, 5 — пятиугольником и т. д.

из книги Диофанта Александрийскго «Арифметика»
и его же учения «О многоугольных числах»

М1◇1°. Рассмотрим последовательность  , ... (древние греки называли Г-образные фигурки *гномонами*). Сколько клеток в k-той фигурке и чему равна суммарная площадь первых k гномонов?

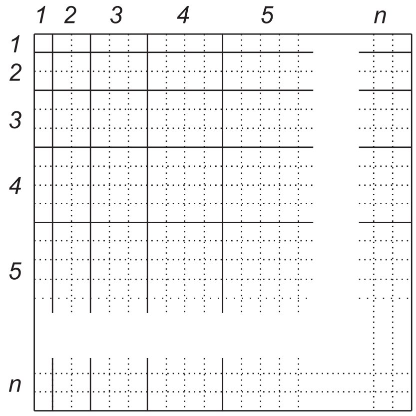
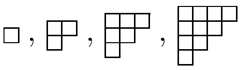
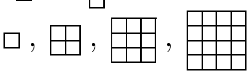


Рис. 1 - 1. Пифагорова таблица умножения чисел от 1 до n.

М1◇2. Чему равно k-е нечётное число и сумма первых k нечётных чисел? Чему равно k-е чётное число и сумма первых k чётных чисел? Вычислите сумму 300 нечётных чисел, начиная со 179, и сумму 200 чётных чисел, начиная с 444.

М1◇3°. Треугольные числа:  — это 1, 3, 6, 10, ... Четырёхугольные числа:  — это квадраты. Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат. Явно выразите n-тое треугольное число T_n через n и найдите сумму первой тысячи натуральных чисел.

М1◇4° (пифагорова таблица умножения). Докажите, что $mk = km$, т. е. что $\underbrace{k+k+\cdots+k}_{m} = \underbrace{m+m+\cdots+m}_{k}$. Каковы размеры и площадь таблицы на рис. 1 - 1? Сколько клеток в k-том, считая от левого верхнего угла пифагоровой таблицы, «толстом» гномоне ширины k, вершина которого представляет k^2, а стороны направлены влево и вверх и дают произведения k на 1, 2, ..., $(k-1)$?

М1◇5. Сформулируйте и докажите теорему, описывающую явление: $3+5=2^3$, $7+9+11=3^3$, $13+15+17+19=4^3$, ...

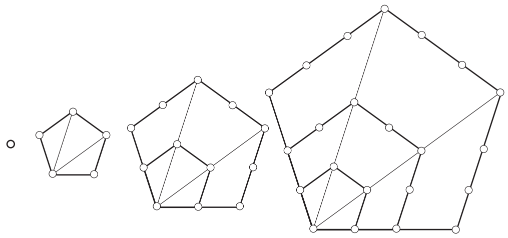


Рис. 1 - 2. Пятиугольные числа.

М1◇6. Вычислите суммы: **а)** $1^3+2^3+\cdots+n^3$; **б)** $T_1+2T_2+\cdots+nT_n$; **в*)** $1^2+2^2+\cdots+n^2$.

М1◇7*. Вычислите сумму[1] $T_1+T_2+\cdots+T_n$.

М1◇8*. Вычислите суммы квадратов первых n чётных чисел и первых n нечётных чисел.

М1◇9. Пятиугольные числа Диофанта: $P_1=1$, $P_2=5$, $P_3=12$, $P_4=22$, ...изображены на рис. 1 - 2. Чему равно $P_k - P_{k-1}$? Выразите P_n через n.

М1◇10. Дайте ясное определение n-того m-угольного числа Диофанта[2] M_n и напишите явную формулу, выражающую M_n через n.

[1] её можно было бы назвать n-тым «пирамидальным числом», поскольку, представляя себе треугольные числа из зад. М1◇3 сложенными не из клеточек, а из кубиков, можно думать об этой сумме как о треугольной пирамиде высоты n, в нижнем этаже которой находится T_n, затем T_{n-1} и т. д.

[2] наш эпиграф, как и всякий древний текст, полон тайн и неясностей, ибо дошёл до нас извилистым путём многократного перевода – пересказа, нередко выполненного людьми, в числах не слишком искушёнными...

Суммирование разностей

Арифметическая прогрессия — это (конечная или бесконечная) последовательность чисел a_k, в которой разность двух соседних чисел $a_k - a_{k-1}$ одинакова для всех k (она называется *разностью* или *приращением* прогрессии и обычно обозначается через d).

М2◇1°. Будет ли арифметической прогрессией последовательность, k-тый член которой равен:

а) $\dfrac{1+2+\cdots+k}{k}$ **б)** $\underbrace{11\ldots1}_{k}$ **в)** k-му m-угольному числу Диофанта

г) разности $M_{k+1} - M_k$ между $(k+1)$-м и k-м m-угольными числами Диофанта

д) k-тому натуральному числу, оканчивающемуся на 13 ?

М2◇2°. Выразите n-тый член произвольной арифметической прогрессии через первый член и разность. Чему равно 43-е натуральное число, большее 57, с остатком 91 от деления на 179?

М2◇3°. В некой арифметической прогрессии $a_m = -a_n$ для каких-то $m < n$. При каких m, n эта прогрессия содержит нуль и под каким номером?

М2◇4°. Какие из перечисленных ниже свойств чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ необходимы, а какие — достаточны для того, чтобы эта последовательность была арифметической прогрессией?

а) любой элемент (кроме крайних), есть среднее арифметическое двух соседних;

б) $2\,a_i = a_{i-2} + a_{i+2}$ при всех $2 \leqslant i \leqslant n-2$; **в)** $a_i + a_{n-i}$ одинаково для всех $0 \leqslant i \leqslant n$.

М2◇5°. Выразите сумму $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ арифметической прогрессии[1] через:

а) a_1, a_n и n , **б)** a_1, n и приращение d ; после чего

в) найдите сумму всех четырёхзначных чисел с остатком 57 от деления на 179.

М2◇6. По строкам и столбцам прямоугольной таблицы размера $m \times n$ стоят арифметические прогрессии. Найдите сумму всех чисел в таблице, если сумма четырёх угловых равна S.

М2◇7*. Можно ли разбить множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ в объединение (возможно, бесконечного) набора попарно непересекающихся бесконечных арифметических прогрессий с разностями d_1, d_2, …, удовлетворяющими неравенству $1/d_1 + 1/d_2 + \cdots < 0,9$?

Суммирование разностей. Сумму $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ легко вычислить, когда каждое её слагаемое представляется в виде разности $b_i = c_{i+1} - c_i$ чисел из некой последовательности $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ (чему, кстати, будет равна такая сумма?). Эту идею можно развить: заменим каждое b_i подходящей суммой $b_i = \pm c_{i1} \pm c_{i2} \pm \cdots \pm c_{im_i}$ так, чтобы при подстановке в исходную сумму $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ бóльшая часть «вспомогательных» слагаемых c_{ij} либо сокращалась, либо легко складывалась.

М2◇8. Чему равна сумма: **а)** $\dfrac{1}{1\cdot2} + \dfrac{1}{2\cdot3} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)}$; **б)** $1\cdot2 + 2\cdot3 + \cdots + n\,(n+1)$;

в) $\dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}a_n}$ ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ – арифметическая прогрессия с разностью d);

г) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3} + \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}$; **д)** $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \cdots + n\,(n-1)\,(n+2)$;

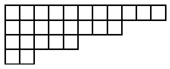
е) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$; **ж)** первых n m-угольных чисел.

М2◇9. Выразите $(n+1)^k$ и разность $(n+1)^k - n^k$ в виде многочленов от n при $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

М2◇10. Пользуясь предыдущей задачей, вычислите сумму k-тых степеней первых n натуральных чисел для $k = 0, 1, 2, 3, 4$ (поучительно сравнить это с зад. М1◇3 и зад. М1◇6).

М2◇11*. Многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами называются *целозначным*, если он принимает целые значения во всех целых x. Могут ли коэффициенты такого многочлена быть не целыми, и если да, то есть ли какие-нибудь ограничения на их знаменатели[2]?

---

[1]отметим, что прогрессии можно рисовать на клетчатой бумаге; например $2, 5, 8, 11$ — это 

[2]Скажем, может ли какой-нибудь коэффициент у целозначного квадратичного многочлена быть равен $1/3$? А у кубического? Что можно сказать о линейных f?

Геометрические прогрессии

В банке живут бактерии и каждый день их число удваивается, так что за неделю банка заполняется бактериями целиком. За сколько дней бактерии заполнят полбанки?

М3◇1°. Кто из участников в диалога[1] ближе к истине: ПРЕМЬЕР (ДОКЛАДЫВАЕТ): …чтобы выполнить поставленную президентом задачу об удвоении ВВП за 10 лет, необходимо каждый год увеличивать ВВП на 7%… ПРЕЗИДЕНТ (ПОПРАВЛЯЕТ С МЕСТА): Не на 7, а на 10…

Геометрическая прогрессия — это (конечная или бесконечная) последовательность чисел g_k, в которой отношение двух соседних чисел $g_k : g_{k-1}$ одинаково для всех k и отлично от 0 и 1. Это отношение называется *знаменателем* прогрессии и обычно обозначается через q. Если положительные числа k, ℓ, m удовлетворяют соотношению $m : \ell = \ell : k$, то ℓ называется *средним геометрическим* k и m.

М3◇2°. Будет ли геометрической прогрессией последовательность, k-тый член которой равен: **а)** $0,\underbrace{0\dots0}_{k}3$; **б)** 3^{-k}; **в)** $\underbrace{33\dots3}_{k}$; **г)** $\sqrt[k]{3}$; **д)** $g'_k \cdot g''_k$, где g'_k, g''_k – геометрические прогрессии; **е)** t^{a_k}, где $t \neq 0, 1$ — фиксированное число, а $a_k \in \mathbb{Z}$ образуют арифметическую прогрессию.

М3◇3. Можно ли разбить $\mathbb{N}$ в объединение **а)** конечного **б)** бесконечного набора попарно непересекающихся бесконечных геометрических прогрессий?

М3◇4. Докажите, что дробь $(a^m - b^m) : (a - b)$ сокращается до многочлена от a, b и найдите его явно. Можно ли сказать что-нибудь аналогичное про дробь $(a^m + b^m) : (a + b)$?

М3◇5. Вычислите сумму $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ и выразите сумму произвольной конечной геометрической прогрессии через начальный член, количество слагаемых и знаменатель.

М3◇6. Найдите суммы: **а)** $1+2\,q+3\,q^2+\dots+(n+1)\,q^n$ **б)** $1\cdot2+2\cdot3\,q+3\cdot4\,q^2+\dots+(n+1)(n+2)\,q^n$.

М3◇7. Пух и Пятачок пошли в гости к Кролику, жившему в 10 *км*. Пух всё время шёл со скорстью 5 *км/ч*, а Пятачок — 10 *км/ч* (чтоб заранее проверить, дома ли Кролик). Добегая до Кролика, Пятачок мгновенно разворачивается и бежит к Пуху (сказать, что тот дома), а встречая Пуха, мгновенно разворачивается и снова бежит к Кролику (ещё раз удостовериться, что тот дома) и т. д. пока Пух не добрался до Кролика. Какое расстояние в общей сложности пробежит Пятачок? Какая бесконечная прогрессия при этом просуммировалась?

М3◇8. Какими надо взять в предыдущей задаче скорости Пуха и Пятачка и расстояние до дома Кролика, чтобы вычислив расстояние, которое пробежит Пятачок, можно было бы найти сумму бесконечной убывающей прогрессии $g_0 + g_0q + g_0q^2 + g_0q^3 + \cdots$ с произвольно заданными положительными начальным членом g_0 знаменателем $q < 1$, если понимать под такой бесконечной суммой *наименьшее* число, большее любой конечной суммы. Докажите, что такое число существует и выразите его через начальный член и знаменатель прогрессии.

М3◇9. Придя в гости к Кролику, друзья разделили всю имевшуюся в доме провизию на три равные части и сели завтракать. Через 10 минут Пух успел полностью съесть свою долю, тогда как Кролик и Пятачок съели, соответственно, половину и треть от своей доли. Будучи воспитанными, Кролик с Пятачком отдали Пуху по половине от оставшейся у них провизии, но через 5 минут тот снова успел всё съесть, тогда как Кролик с Пятачком снова съели лишь половину и треть. Далее процесс повторялся, причём каждая следующая стадия происходила вдвое быстрее предыдущей. Через какое время вся провизия будет съедена и в каком отношении поделится она между Пухом, Кроликом и Пятачком?

М3◇10. Всегда ли при делении натуральных чисел «уголком» получится *периодическая* десятичная дробь[2]? Можно ли так получить дроби: **а)** $0,179179\dots$; **б)** $20,0520052005\dots$; **в)** $2,7435791179179179\dots$; **г)** $0,a_1\dots a_n\,b_1\dots b_m\,b_1\dots b_m\,\dots$ (a_i и b_j обозначают цифры[3])?

---

[1] который не так давно показывали в теленовостях

[2] конечная десятичная дробь тоже *является* периодической — её период состоит из одной цифры нуль

[3] ПОДСКАЗКА: попробуйте дробь с числителем $a_1\dots a_n b_1\dots b_m - a_1\dots a_n$

Разрезания и площади

Свойства площадей. Многие плоские фигуры $\mathfrak{F}$ имеют площадь $S(\mathfrak{F})$. Например, площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab. Площади равных фигур равны. Фигуры равной площади называются *равновеликими*. Если фигура $\mathfrak{F}$ разрезана прямолинейным разрезом на две части $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, и из трёх фигур $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ какие-то две имеют площадь, то её имеет и третья, причём $S(\mathfrak{F}) = S(\mathfrak{F}_1) + S(\mathfrak{F}_2)$. Две фигуры называются *равносоставленными*, если одну из них можно конечным числом прямолинейных разрезов разбить на части, из которых складывается другая фигура. Площади равносоставленных фигур равны.

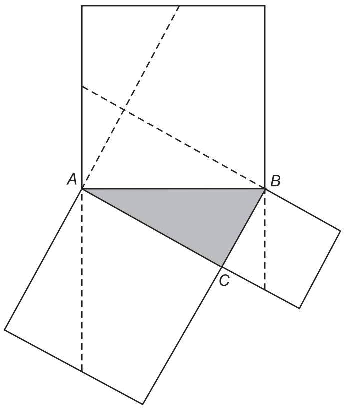


Рис. 4 - 1.

М4◇1 (теорема Пифагора – 1). Равносоставлен ли квадрат гипотенузы пифагоровых штанов на рис. 4 - 1 сумме квадратов катетов?

М4◇2 (теорема Пифагора – 2). Докажите, что отрезки a, b, c на рис. 4 - 2 тогда и только тогда образуют прямоугольный треугольник[1], когда $c^2 = a^2 + b^2$.

М4◇3. Дан прямоугольный $\triangle\, ABC$. Равносоставлен ли:

а) квадрат его высоты (см. рис. 4 - 4) прямоугольнику, стороны которого — отрезки, на которые высота разбивает гипотенузу.

б) квадрат его катета (см. рис. 4 - 3) прямоугольнику, стороны которого — гипотенуза и её отрезок, заключённый между высотой и этим катетом.

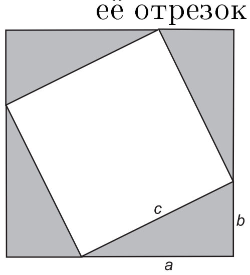


Рис. 4 - 2.

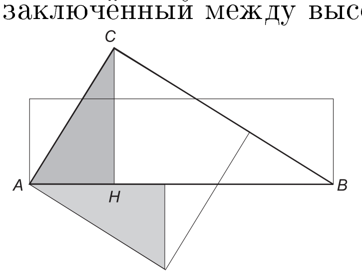


Рис. 4 - 3.

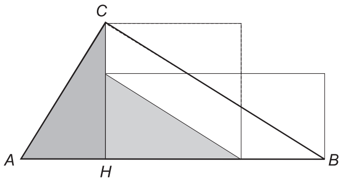


Рис. 4 - 4.

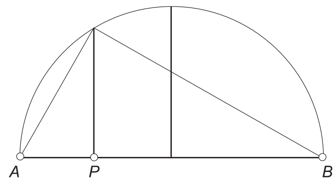


Рис. 4 - 5.

М4◇4. В прямоугольном $\triangle\, ABC$ AB — гипотенуза, CH — высота. Верно ли, что:

а) $|AH| : |CH| = |CH| : |HB|$ **б)** $|AH| : |AC| = |AC| : |AB|$ **в)** $|BH| : |CB| = |CB| : |AB|$

М4◇5. Циркулем и линейкой постройте арифметическое и геометрическое средние двух отрезков $a = AP$ и $b = PB$ (см. рис. 4 - 5). Докажите, что геометрическое среднее двух положительных чисел не превосходит арифметического, и опишите все случаи их равенства.

М4◇6. Даны отрезок длины 1 и отрезок длины a. Циркулем и линейкой постройте отрезок, длина которого равна:
а) $\sqrt{3}$ **б)** $\sqrt{19}$ **в)** $\sqrt{a}$ **г)** a^2.

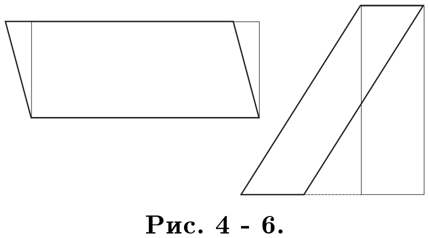


Рис. 4 - 6.

М4◇7. Даны отрезки длины 1, p и q. Циркулем и линейкой постройте корни уравнений: **а)** $x^2 + p\,x - q = 0$ **б)** $x^2 - p\,x - q = 0$.

М4◇8. Циркулем и линейкой постройте квадрат, площадь которого относится к площади данного квадрата как $m : n$ (отрезок длины 1 *не задан*).

М4◇9. Равновелики ли параллелограммы на рис. 4 - 6 соответствующим прямоугольникам? Выразите площадь: **а)** параллелограмма **б)** треугольника **в)** трапеции через их основания и высоты.

М4◇10. Стороны выпуклого четырёхугольника равны (по часовой стрелке) a, b, c, d. Может ли его площадь быть больше: **а)** $(ab + cd)/2$ **б)** $(ac + bd)/2$?

М4◇11. Может ли у треугольника с высотами h_1, h_2, периметром P и площадью S быть:
а) $P > 1\,\textit{м}$, $S < 1\,\textit{см}^2$ **б)** $P < 1\,\textit{см}$, $S > 1\,\textit{м}^2$ **в)** $h_1 \geqslant 1\,\textit{м}$, $h_2 \geqslant 1\,\textit{м}$, $S \leqslant 1\,\textit{см}^2$.

М4◇12. Зависит ли сумма расстояний от точки, лежащей внутри правильного треугольника, до его сторон от положения этой точки?

---

[1]кстати, единственен ли (если существует) треугольник, складывающийся из трёх данных отрезков?

Площади и координаты

М5◇1°. Нарисуйте на клетчатой бумаге оси координат и отметьте точки $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$, $D(2,5)$, $E(0,5)$, $F(-7,7)$, $G(-5,4)$. Чему равны (в клеточках) площади многоугольников: **а)** CED **б)** ADE **в)** AEC **г)** ECG **д)** $ABDE$ **е)** $GCEF$ **ж)** $ACEFG$?

М5◇2. Верно ли, что площадь любого квадрата с вершинами в узлах клетчатой бумаги измеряется целым числом клеток?

М5◇3°. Отметьте на координатной клетчатой бумаге точки $O(0,0)$ и $A(4,3)$, достройте отрезок OA до квадрата, вычислите площадь этого квадрата и найдите длину $|OA|$.

М5◇4. Найдите квадрат расстояния от начала координат до произвольной точки $P(p_1,p_2)$.

М5◇5. Вершины параллелограмма $ABCD$ имеют координаты $A(1,5)$, $B(-3,2)$, $C(4,-1)$. Найдите: **а)** координаты вершины D **б)** $S(ABCD)$ **в)** длины сторон **г)** длины высот.

М5◇6* (формула Пика). Пусть $\mathfrak{M}$ — не обязательно выпуклый, но несамопересекающийся многоугольник с вершинами в узлах клетчатой бумаги. Сравните площадь $S = S(\mathfrak{M})$ (в клеточках) с числом $\Pi = \Pi(\mathfrak{M}) \overset{\text{def}}{=}$ (число узлов внутри $\mathfrak{M}$)$+\frac{1}{2}$(число узлов на границе $\mathfrak{M}$)-1. Для этого выясните, справедливы ли равенства:

- **а)** $\Pi(\mathfrak{M}) = \Pi(\mathfrak{M}_1) + \Pi(\mathfrak{M}_2)$ для многоугольника $\mathfrak{M}$, разрезанного прямолинейным разрезом на два многоугольника $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ (тоже с вершинами в узлах клеток);
- **б)** $\Pi = S$ для прямоугольника со сторонами, идущими по линиям клеток;
- **в)** $\Pi = S$ для прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям клеток;
- **г)** $\Pi = S$ для любого треугольника; **д)** $\Pi = S$ для любого выпуклого многоугольника;
- **е)** $\Pi = S$ в общем случае.

Вектор — это параллельный перенос. Вектор задаётся стрелкой, причём две стрелки тогда и только тогда задают один и тот же вектор, когда они сами получаются друг из друга некоторым параллельным переносом. Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$, переводящего $A(a_1,a_2)$ в $B(b_1,b_2)$, называется пара чисел $\big((b_1-a_1),(b_2-a_2)\big)$, т. е. величины сдвигов вдоль координатных осей при этом переносе. Векторы можно складывать и умножать на числа (подумайте или вспомните как).

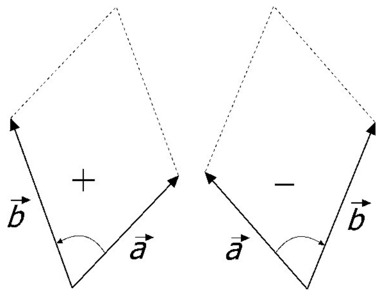


Рис. 5 - 1.

М5◇7. В $\triangle\ ABC$ на стороне AB взяли точку P, а на отрезке CP — точку Q, так что $|AP|:|PB| = 2:1$ и $|CQ|:|QP| = 3:5$. Выразите **а)** $\overrightarrow{AB}$ **б)** $\overrightarrow{QC}$ **в)** $\overrightarrow{BQ}$ **г)** $\overrightarrow{AQ}$ через векторы $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CB}$.

Ориентированная площадь. Площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ (см. рис. 5 - 1), взятая со знаком «плюс», если кратчайший поворт, совмещающий направление $\overrightarrow{a}$ с направлением $\overrightarrow{b}$, происходит против ЧС, и со знаком «минус» — если против ЧС, обозначается через $\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$ и называется *ориентированной* площадью. Отметим, что равенство $\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) = 0$ равносильно пропорциональности векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ (т. е. равенству $\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{b}$ для некоторого числа λ).

М5◇8°. Выразите через $\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$ ориентированные площади: **а)** $\delta(3\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$ **б)** $\delta(\overrightarrow{b},\overrightarrow{a})$ **в)** $\delta(-\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$ **г)** $\delta(2\overrightarrow{a},-5\overrightarrow{b})$ **д)** $\delta(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\overrightarrow{b})$ **е)** $\delta(\overrightarrow{a}+10\overrightarrow{b},\overrightarrow{b})$ **ж)** $\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}-2005\overrightarrow{a})$

М5◇9. Докажите[1], что $\delta(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c},\overrightarrow{b}) = \delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) + \delta(\overrightarrow{c},\overrightarrow{b})$.

М5◇10. Выразите[2] $\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$ через координаты векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

М5◇11. В параллелограмме $OPQR$ известны координаты вершин $O(0,0)$, $P(p_1,p_2)$ и $R(r_1,r_2)$. Найдите его площадь и площадь $\triangle\ OPR$.

М5◇12. Выясните как относится площади $\triangle\ PBQ$ и $\triangle\ AQC$ из зад. М5◇7.

[1] подсказка: покажите, что либо $\overrightarrow{c} = \alpha\overrightarrow{b}$, либо $\overrightarrow{a} = \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}$ и отдельно рассмотрите эти два случая

[2] подсказка: верно ли, что $\delta(\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b},\varepsilon\overrightarrow{e}+\varphi\overrightarrow{f}) = \alpha\varepsilon\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e}) + \alpha\varphi\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{f}) + \beta\varepsilon\delta(\overrightarrow{b},\overrightarrow{e}) + \beta\varphi\delta(\overrightarrow{b},\overrightarrow{f})$?

Делимость и взаимная простота

Прошу — забудь всё, чему ты учился в школе; потому что ты этому не научился.
(Э. Ландау, «Основы анализа», М., «ИЛ», 1947, стр. 8, п. 3)

В решениях задач этого листка словосочетания «простое число» и «простые множители» запрещены.

М6◇1°. Какое наименьшее расстояние можно отложить на прямой от заданной точки, пользуясь двумя шаблонами (без делений) длины **а)** 13 *см* и 29 *см*; **б)** 21 *см* и 30 *см*?

М6◇2°. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$ — два фиксированных целых числа. Обозначим через $I = I(a, b) \subset \mathbb{Z}$ множество всех ℓ, которые можно отложить на числовой прямой от нуля, используя шаблоны a и b (иначе I можно описать[1] как множество всех чисел, представимых в виде $\ell = k\,a + m\,b$ с целыми k и m). Пусть d — наименьшее положительное число в I. Верно ли, что:

а) a, b, а также суммы, разности и любые целые кратные чисел из I лежат в I?

б) $I(a \pm mb, b) = I(a, b) \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}$? **в)** все числа из I (в частности, a и b) делятся на d?

г) все числа из I (в частности, d) делятся на любой общий делитель чисел a и b?

НОД и НОК. Наибольшее натуральное число, делящее каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, называется их *наибольшим общим делителем* и обозначается $\text{нод}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Аналогично, наименьшее натуральное число, делящееся на каждое из a_i, называется их *наименьшим общим кратным* и обозначается $\text{нок}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

М6◇3. Рассуждая как в зад. М6◇2, покажите, что $\text{нод}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ делится на любой общий делитель чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и представляется в виде $z_1 a_1 + z_2 a_2 + \cdots + z_n a_n$ с $z_\nu \in \mathbb{Z}$.

М6◇4. Верно ли, что $\text{нок}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ нацело делит любое общее кратное чисел a_i и что $\text{нок}(a, b) \cdot \text{нод}(a, b) = a \cdot b$?

М6◇5°. Верно ли, что $\text{нод}(a \pm mb, b) = \text{нод}(a, b) \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}$?

М6◇6 (алгоритм Евклида). Пусть $a > b$ — два фиксированных натуральных числа. Определим последовательность чисел $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$ правилами: $r_0 = a$, $r_1 = b$, а при $k \geqslant 2$ $r_k =$ (остатку от деления r_{k-2} на r_{k-1}). Докажите, что все числа r_ν лежат в множестве I из зад. М6◇2 и монотонно убывают до тех пор, пока очередное $r_{\nu+1}$ не обратится в нуль (т. е. пока $r_{\nu-1}$ не разделится нацело на r_ν). Как связано это последнее ненулевое r_ν с $\text{нод}(a, b)$?

М6◇7°. Вычислите $\text{нод}(a, b)$ и подберите целые x, y так, чтобы $x\,a + y\,b = \text{нод}(a, b)$, для следующих пар (a, b): **а)** $(17, 13)$; **б)** $(44\,863, 70\,499)$; **в)** $(8\,385\,403, 2\,442\,778)$.

Взаимная простота. Если $\text{нод}(a, b) = 1$ для $a, b \in \mathbb{Z}$, то числа a, b называются *взаимно простыми*.

М6◇8. Какие из перечисленных ниже условий необходимы, а какие достаточны для взаимной простоты a и b: **а)** $\exists\, x, y \in \mathbb{Z} : a\,x + b\,y = 1$ **б)** $\forall\, z \in \mathbb{Z} \ \exists\, k, m \in \mathbb{Z} : ka + mb = z$.

М6◇9. Пусть целые a, b, c таковы, что c взаимно просто с a, а b – любое. Верно ли, что:

а) если произведение ab делится на c, то b делится на c?

б) если b делится как на a, так и на c, то b делится и на произведение ac?

М6◇10. Верно ли, что несократимая дробь p/q (где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) может быть корнем многочлена $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ с целыми коэффициентами, только если a_0 делится на q и одновременно a_n делится на p?

М6◇11. Верно ли, что частные $\text{нок}(a, b) : a$ и $\text{нок}(a, b) : b$ взаимно просты $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$?

М6◇12°. Всегда ли взаимно просты a и $a + 1$? Верно ли, что $\forall\, a \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много $b \in \mathbb{N}$, таких что $b + a$ и $b - a$ взаимно просты?

М6◇13. Найдите *все* целые решения уравнений: **а)** $1537\,x + 1387\,y = 1$ **б)** $5\,x + 7\,y = 11$ **в)** $26\,x + 32\,y = 60$ **г)** $169\,x + 221\,y = 26$ **д)** $28\,x + 30\,y + 31\,z = 365$

М6◇14. Чему равно 91-е натуральное число, одновременно дающее остатки:

а) 2 и 7 от деления, соответственно, на 57 и 179? **б)** 1, 2, 3 от деления на 2, 3, 5?

в) 2, 4, 6, 8 от деления на 5, 9, 11, 14?

[1] множество $I(a, b)$ иногда называют *идеалом*, порождённым a и b

Арифметика на клетчатой бумаге

М$6\frac{1}{2}\diamond$1. Может ли треугольник с площадью 1 кл. и вершинами в узлах содержать узлы строго внутри себя? Может ли он иметь сколь угодно большой периметр? Всякий ли отрезок с концами в узлах, но не содержащий узлов внутри, можно достроить до такого треугольника?

М$6\frac{1}{2}\diamond$2. Дан параллелограмм площадью 1 кл. с вершинами в узлах клетчатой бумаги.

а) Может ли он накрывать какие-либо узлы кроме вершин?

б) Может ли одна из его диагоналей быть сколь угодно длинной?

М$6\frac{1}{2}\diamond$3. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$ и $\text{НОД}(p,q) = 1$. Опишите множество всех узлов, ближайших к прямой $px = qy$, но не лежащих на ней, и найдите расстояние от таких узлов до этой прямой.

М$6\frac{1}{2}\diamond$4* (задача о кузнечиках). Трёх кузнечиков посадили в точки с координатами $(0,1)$, $(1,1)$ и $(1,0)$ и позволили прыгать друг через друга в первом квадранте по следующему правилу: в каждый момент один из векторов, соединяющих начало координат с кузнечиками, находится между двумя другими, и любой из двух «крайних» кузнечиков может центрально симметрично отразиться от этого «среднего». Покажите, что:

а) начало координат и кузнечики всегда находятся в вершинах параллелограмма единичной площади, и никаких других целых точек этот параллелограмм не накрывает;

б) кузнечики могут побывать только в точках с взаимно простыми координатами;

в) для каждой точки с взаимно простыми координатами имеется единственный способ прыгания, приводящий одного из кузнечиков в эту точку.

М$6\frac{1}{2}\diamond$5*. Каждый узел клетчатой бумаги за исключением узла, находящегося в начале координат, накрыли кругом радиуса 179^{-2005} кл. с центром в этом узле. Можно ли из начала координат выпустить (бесконечный) луч, не пересекающий ни одного из этих кругов?

Дроби на клетчатой бумаге. Условимся изображать дробь p/q радиус вектором точки с координатами (q,p). При этом равным дробям будут отвечать сонаправленные векторы, так что величина дроби измеряет *наклон*[1] такого вектора по отношению к оси абсцисс.

М$6\frac{1}{2}\diamond$6°. Пусть p_1, p_2 — любые, а q_1, q_2 — положительные числа, такие что $(p_1/q_1) < (p_2/q_2)$. Опишите все случаи, когда $(p_1/q_1) + (p_2/q_2) = (p_1 + p_2)/(q_1 + q_2)$, а в остальных случаях выясните какими неравенствами связана правая часть с каждым из слагаемых левой части.

М$6\frac{1}{2}\diamond$7* (разложение в цепную дробь). Сопоставим положительному рациональному числу $\alpha = p/q$ с $\text{НОД}(p,q) = 1$ последовательность целых чисел a_0, a_1, a_2, … и последовательность рациональных чисел α_0, α_1, α_2, …, полагая[2]: $\alpha_0 = \alpha$, $a_0 = [\alpha_0]$ и $\alpha_k = (\alpha_{k-1} - a_{k-1})^{-1}$, $a_k = [\alpha_k]$ при $k \geqslant 1$. Покажите, что через конечное число шагов мы получим целое $\alpha_m = a_m$, причём будет выполнено равенство[3] $\alpha = a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + 1/(a_3 + \ldots + (a_{m-1} + 1/a_m)\ldots)))$, и выясните, как связаны числа a_ν с количествами прыжков кузнечиков из зад. М$6\frac{1}{2}\diamond$4 и с отысканием по алгоритму Евклида целых чисел (x,y), таких что $px + qy = 1$.

М$6\frac{1}{2}\diamond$8*. Математический бильярд — это квадрат $ABCD$ с точечными лузами в вершинах. Точечный шар выпустили из середины стороны AD в направлении точки E, которая делит противоположную сторону в отношении $BE : EC = 57 : 179$. Попадёт ли он когда-нибудь в лузу? Если нет, то почему, а если да, то после скольких отражений[4] от стенок?

М$6\frac{1}{2}\diamond$9*. Существует ли (хоть какой-нибудь) параллелограмм площади 4 кл. с центром в узле клетчатой бумаги, не содержащий никаких других узлов ни внутри, ни на границе?

---

[1] точнее, *тангенс ориентированного угла* наклона

[2] значком $[x]$ (читается «*целая часть* x») обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x

[3] например, для $\alpha = 17/23$ получаем: $\dfrac{17}{23} = 0 + \dfrac{1}{23/17} = 0 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{17/5}} = 0 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5/2}}} = 0 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}$

[4] предполагается, что при каждом ударе о стенку «угол падения равен углу отражения»

Как организовать полный перебор

Чтобы управиться с классом, его надо выстроить по росту и перекликнуть по алфавиту.
(из Школьных Заповедей)

М7◇1. Сколько различных **а)** двух- **б)** трёх- **в)** четырёх- **г)** n-буквенных слов[1] можно написать тридцатью тремя буквами русского алфавита?

М7◇2. Можно ли закодировать русский алфавит азбукой Морзе так, чтобы каждая буква передавалась не более, чем четырьмя сигналами? Какое число сигналов на символ достаточно отводить для передачи 3000 различных иероглифов?

М7◇3. Сколько всего разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить переставляя буквы в словах `ОК, рок, урок, шнурок`?

М7◇4. Как изменится ответ в зад. М7◇1, если потребовать, чтобы буквы не повторялись?

М7◇5. Можно ли упорядочить все сто двухразрядных чисел от 00 до 99 так, чтобы каждые два соседних числа отличались ровно в одной цифре, причём ровно на единицу? Тот же вопрос про трёх- и n-разрядные числа.

Факториалы. Произведение $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$ обозначается $n!$ (читается «n-факториал»). По определению, $\boxed{0! = 1! = 1}$.

М7◇6. При каких n: **а)** $n! \geqslant 3^n$; **б)** $2^n \geqslant n^3$?

Математическая индукция — это способ доказать бесконечную серию занумерованных утверждений за два хода: **(1)** – *база индукции* – доказывается утверждение №1 ; **(2)** – *индуктивный переход* – доказывается, что $\forall N \in \mathbb{N}$ из утверждения №N вытекает утверждение №$(N+1)$.

М7◇7. Верно ли, что при разрезании выпуклого n-угольника на треугольники по диагоналям число получившихся треугольников будет одним и тем же, как бы не резали? Чему оно может равняться? Какова сумма внутренних углов выпуклого n-угольника?

М7◇8. На сколько кусков разбивается плоскость n прямыми, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны?

М7◇9. Всегда ли плоскость, разбитая на части прямыми и окружностями, раскрашивается в два цвета так, чтобы имеющие общую сторону куски были разноцветными?

М7◇10*. Даны n точек. Верно ли, что они либо лежат на одной прямой, либо среди прямых, соединяющих пары этих точек, имеется не менее n разных?

М7◇11. Сколько разных m-буквенных слов можно написать n-буквенным алфавитом, если буквы в словах **а)** могут **б)** не могут повторяться?

М7◇12. В бесконечный лабиринт на рис. 7 - 1 падает шарик и под действием тяжести проваливается вниз, случайным образом поворачивая налево-направо. На на каждой из комнат верхних 11 этажей напишите, сколькими различными путями шарик может до неё добраться.

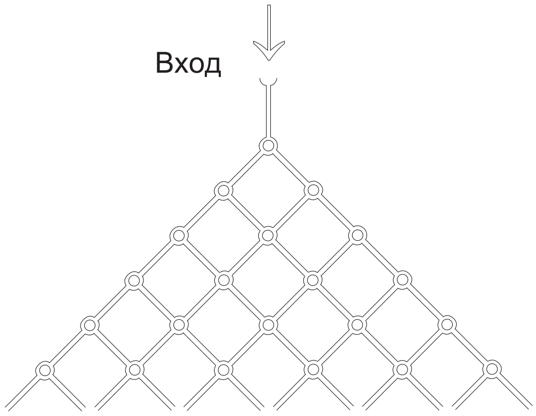


Рис. 7 - 1. Лабиринт Паскаля.

М7◇13. Для $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ раскройте скобки и приведите подобные слагаемые в $(1+x)^k$ и $(a+b)^k$. Сформулируйте и докажите теорему, сравнивающую полученные ответы с ответами зад. М7◇12.

М7◇14. Число $x + 1/x$ является целым. Будет ли целым $x^n + 1/x^n$? (Начните с $n = 2, 3, \dots$)

[1] слова не обязаны быть осмысленными и буквы в словах могут повторяться

Множества и отображения

(памятка начинающему пользователю)

Понятие *множества* в анализе, подобно понятию *прямой* в геометрии, определяется не конструктивно, а как «нечто, удовлетворяющий аксиомам» (этот список *аксиом теории множеств* мы пока не будем уточнять). Как *прямая* и *точка* формализуют известные пространственные образы, так *множества* формализуют житейские представления о совокупностях предметов произвольной природы. Множество состоит из *элементов*. Элементы могут быть любые: числа, стулья, другие множества... Принадлежность элемента a множеству A обозначается $a \in A$. Единственное множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. Все элементы в любом множестве, по определению, *различны*. Множество задано, как только про любой объект можно сказать, принадлежит он данному множеству или нет. Два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов. Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначение: $A \subset B$), если каждый элемент $a \in A$ лежит также и в B. Для любых двух множеств A и B множество $A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из них, называется их *объединением*; множество $A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно каждому из них, называется их *пересечением*; множество $A \setminus B$, состоящее из всех элементов множества A, которые не содержатся в B, называется их *разностью*.

M8◇1. Сколько всего подмножеств у множества, содержащего n элементов?

M8◇2. Какие из перечисленных ниже свойств справедливы для любых множеств A, B и C:

а) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ **б)** $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

в) $A \cup C = B \cup C \;\Rightarrow\; A = B$ **г)** $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

д) $A \setminus C = B \setminus C \;\Rightarrow\; A = B$ **е)** $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

ж) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ **з)** $A \cap C = B \cap C \;\Rightarrow\; A = B$

M8◇3. Выражаются ли:

а) пересечение через разность? **б)** разность через пересечение и объединение?

Отображение $A \xrightarrow{f} B$ из множества A в множество B — это правило, сопоставляющее *каждому* элементу $a \in A$ *ровно один* элемент $f(a) \in B$, зависящий от a и называемый *образом* a. Подмножество $f(A) \subset B$, состоящее из образов элементов множества A, называется *образом* отображения f. Отображения $A \xrightarrow{f} B$ и $A \xrightarrow{g} B$ *равны*, если $f(a) = g(a) \quad \forall a \in A$. Отображение $B \xrightarrow{g} A$ называется *обратным* к отображению $A \xrightarrow{f} B$, если $g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$ и одновременно $f(g(y)) = y \quad \forall b \in B$. В этой ситуации отображения f и g называют *обратимыми* и пишут $g = f^{-1}$ и $f = g^{-1}$. Отображение $A \xrightarrow{f} B$ называется *отображением «на»* (или *сюръективным*, или *эпиморфным*, или *наложением*), если у каждого элемента $b \in B$ есть прообраз в A, т. е. $f(A) = B$. Отображение называется *отображением «в»* (или *инъективным*, или *мономорфным*, или *вложением*), если никакие два элемента из A не переходят в один и тот же элемент B, т. е. $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$. Отображение, являющееся одновременно и вложением и наложением, называется *взаимно однозначным* (или *изоморфизмом*, или *биекцией*).

M8◇4°. Нарисуйте все отображения **а)** $\{0,1,2\} \longrightarrow \{0,1\}$; **б)** $\{0,1\} \longrightarrow \{0,1,2\}$. Сколько среди них сюрьективных и сколько инъективных?

M8◇5°. Из отображений: $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{Z}$; $\mathbb{N} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{N}$; $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto px,} \mathbb{Z}$ (с $p \in \mathbb{Z}$); $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto px,} \mathbb{R}$ (с $p \in \mathbb{R}$) выберите все **а)** биекции, **б)** инъекции, **в)** сюръекции.

M8◇6. Сколько всего имеется отображений из m-элементного множества в n-элементное?

M8◇7. Сколько среди них инъективных?

M8◇8°. Равносильна ли взаимная однозначность обратимости?

M8◇9°. Достаточно ли для того, чтобы f было обратно к g, только одного условия

а) $f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$? **б)** $g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$?

M8◇10. Некое число делится на 2, но не делится на 4. Каких делителей у него больше: чётных или нечётных?

M8◇11. Каких треугольников с целыми длинами сторон больше: с периметром 2005 или 2008?

Как сравнивать множества

По пыльной тропинке далёкой планеты бредёт стадо семиногих пятихвосток. Сколько ног приходится на каждую сотню хвостов?

Прообразы. Пусть задано отображение $A \xrightarrow{f} B$, и $b \in B$. Множество $f^{-1}(b) \overset{\text{def}}{=} \{\, a \in A \mid f(a) = b \,\} \subset A$ называется *полным прообразом* b, а его элементы — *прообразами* b. У разных $b \in B$ может быть разное число (в том числе и нуль) прообразов. Если каждый $b \in B$ имеет ровно m прообразов, то отображение f называется *m-листным накрытием*[1].

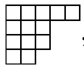
М9◇1°. Как изменятся ответы в зад. М7◇3, если букву о и букву к обе заменить буквой ы?

М9◇2. Сколько слов можно получить переставляя буквы в словах: **а)** курок, **б)** СССР, **в)** колобок, **г)** рефрижератор, **д)** $\underbrace{\mathtt{aa\ldots a}}_{\alpha}\underbrace{\mathtt{бб\ldots б}}_{\beta}$, **е)** $\underbrace{\mathtt{a}_1\mathtt{a}_1\ldots\mathtt{a}_1}_{m_1}\underbrace{\mathtt{a}_2\mathtt{a}_2\ldots\mathtt{a}_2}_{m_2}\ldots\underbrace{\mathtt{a}_k\mathtt{a}_k\ldots\mathtt{a}_k}_{m_k}$?

М9◇3. Сколько имеется одночленов степени d от **а)** двух **б)** трёх **в)** n переменных?

М9◇4. Сколько получится слагаемых, если тупо раскрыть скобки у $(a+b+c)^3$? Какие одночлены и с какими коэффициентами останутся после приведения подобных?

М9◇5. Те же вопросы про $(a_1 + \cdots + a_m)^d$. Цело ли число $1000!/10!^{100}$?

Диаграмма Юнга — это картинка типа , состоящая из выровненных по левому краю горизонтальных клеточных полосок, длина которых сверху вниз не возрастает.

М9◇6. Между какими из перечисленных ниже множеств имеется изоморфизм? Постройте эти изоморфизмы явно. Сколько элементов в каждом множестве?

- **а)** значки, которые можно высвечивать, зажигая ровно 12 лампочек на прямоугольном табло, имеющем 5 рядов по 4 лампочки в каждом;
- **б)** способы раскладывания 8 одинаковых кусков сахара по 13 разным чашкам;
- **в)** слова, которые получаются при перестановке букв в слове ааааааааббббббббббббб;
- **г)** маршруты из зад. М7◇12, приводящие шарик в 12-ю комнату на 20-м этаже (этажи и комнаты нумеруются сверху вниз и слева направо, начиная с нулевого номера);
- **д)** одночлены a^8b^{12}, которые получатся если тупо раскрыть скобки у $(a+b)^{20}$ и не приводить подобные слагаемые;
- **е)** диаграммы Юнга высоты $\leqslant 8$ и ширины $\leqslant 12$.

М9◇7. Имеется 5 разноцветных чашек, 7 разноцветных соломинок, 4 одинаковых стакана и 6 одинаковых кусков сахара. Сколькими способами можно разложить[2]: **а)** сахар по чашкам? **б)** соломинки по чашкам? **в*)** сахар по стаканам? **г*)** соломинки по стаканам?

М9◇8. Как изменятся ответы в зад. М9◇7, если запретить пустые ёмкости?

Группа симметрий. Набор G взаимно однозначных отображений $M \xrightarrow{g} M$ некоторого множества M в себя называется *группой симметрий*, если композиции $f \circ g$ любых двух преобразований из G и обратные преобразования g^{-1} к любым преобразованиям из G также лежат[3] в G. Множество всех элементов, которые можно получить из данного элемента $m \in M$, действуя на него всевозможными преобразованиями из G, называется *G-орбитой* элемента m.

М9◇9. Пусть на конечном множестве M действует группа симметрий G, и $m \in M$. Докажите, что все преобразования из G, оставляющие m на месте, тоже образуют группу, и отношение числа элементов в G к числу таких преобразований равно длине G-орбиты m.

М9◇10. Грани **а)** кубика **б)** тетраэдра раскрашивают в 6 фиксированных разных цветов (разные грани — в разные цвета). Сколько разных игрушек получится?

М9◇11*. Сколько разных игрушек получится, если в предыдущей задаче склеивать крашеные **а)** кубики **б)** тетраэдры по два грань к грани?

[1] в частности, однолистные накрытия — это в точности взаимно однозначные отображения

[2] две раскладки одинаковы, если они получаются друг из друга передвиганием ёмкостей по столу без изменения их содержимого.

[3] обратите внимание, что G автоматически содержит тождественное преобразование Id_M, оставляющее каждый элемент $m \in M$ на месте

Знакомьтесь, граф ...

Граф — это конечное множество точек на плоскости (*вершин графа*), некоторые из которых соединены отрезками (*рёбрами графа*). Количество рёбер, выходящих из данной вершины A, называется *степенью* (или *валентностью*) этой вершины и обозначается $\deg A$.

М$9\frac{1}{2}\diamond$1 (лемма о рукопожатиях). Выразите сумму степеней всех вершин произвольного графа через общее число его рёбер.

М$9\frac{1}{2}\diamond$2. В любом ли графе с более чем одной вершиной есть пара вершин одинаковой степени?

М$9\frac{1}{2}\diamond$3. Все 28 Петиных одноклассников имеют по различному числу друзей в этом классе. Сколько из них дружит с Петей?

М$9\frac{1}{2}\diamond$4 (уроки демократии - 1). Каждый из 450 думцев врезал по физиономии ровно одному своему коллеге. Наберётся ли 150 думцев, из которых никто никого по лицу не бил?

М$9\frac{1}{2}\diamond$5* (теорема Холла). Известно, что для любой компании присутствующих на балу кавалеров можно указать не меньшую по численности стайку барышень, каждая из которых незнакома хотя бы с одним кавалером из этой компании. Могут ли все присутствующие на балу кавалеры одновременно танцевать вальс с незнакомыми барышнями?

Путь в графе — это последовательность его вершин $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ и рёбер $[A_1, A_2]$, …, $[A_n, A_{n+1}]$, соединяющих соседние вершины в этой последовательности; число n называют *длиной* пути. Если все рёбра пути различны и начальная вершина совпадает с конечной: $A_1 = A_{n+1}$, то путь называют *циклом*. Граф называют *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём. Связный граф без циклов называется *деревом*.

М$9\frac{1}{2}\diamond$6°. Нарисуйте какое-нибудь дерево. Пусть между любыми двумя вершинами графа имеется ровно один путь из неповторяющихся рёбер. Является ли это условие

а) необходимым **б)** достаточным для того, чтобы граф был деревом?

М$9\frac{1}{2}\diamond$7°. Как связаны число вершин и число рёбер произвольного дерева?

М$9\frac{1}{2}\diamond$8° (остовы). Всегда ли из связного графа можно удалить несколько рёбер так, чтобы осталось дерево с тем же множеством вершин, что и исходный граф[1]?

М$9\frac{1}{2}\diamond$9* (теорема Кели). Докажите, что полный[2] граф с n вершинами имеет n^{n-2} остовов.

М$9\frac{1}{2}\diamond$10°. Всегда ли в связном графе можно удалить некоторую вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы он остался связным?

М$9\frac{1}{2}\diamond$11. Могут ли степени всех вершин несвязного n-вершинного графа быть $\geqslant (n-1)/2$?

М$9\frac{1}{2}\diamond$12. Из столицы выходит 101 авиалиния, из г. Дальний — одна, а из остальных городов — по 100. Можно ли, пусть с пересадками, долететь из столицы в Дальний?

М$9\frac{1}{2}\diamond$13 (эйлеровы графы). Докажите, что в связном графе тогда и только тогда есть цикл, проходящий ровно один раз по каждому рёбру, когда степени всех вершин чётны.

Плоские графы — это графы, рёбра которых не пересекают друг друга нигде кроме вершин. Части, на которые делит плоскость такой граф, называются *гранями графа*.

М$9\frac{1}{2}\diamond$14. Докажите, что грани плоского графа тогда и только тогда раскрашиваются в два цвета так, чтобы грани с общим ребром получались разноцветными, когда этот граф эйлеров (см. зад. М$9\frac{1}{2}\diamond$13).

М$9\frac{1}{2}\diamond$15. Многоугольник разрезают на треугольники непересекающимися (нигде кроме вершин) диагоналями. Может ли при этом получиться меньше двух треугольников с парой сторон, бывших сторонами исходного многоугольника?

[1] такое дерево называется *остовом* графа

[2] граф называется *полным*, если любая его вершина соединена с любой другой ровно одним ребром

Разные задачи о графах

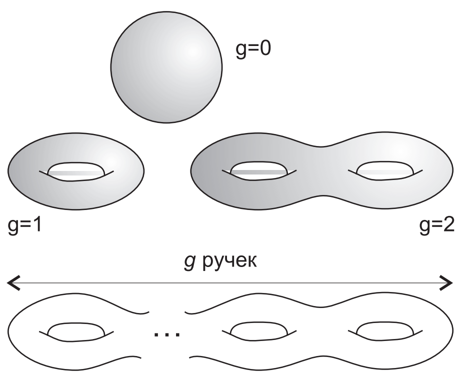


Рис. $9\frac{2}{3}$ - 1. Сферы с ручками.

М$9\frac{2}{3}$◇1 (формула Эйлера). Всегда ли $в - р + г = 2$ в плоском связном графа с $в$ вершинами, $р$ рёбрами и $г$ гранями? Справедливо ли это равенство для вершин, рёбер и граней произвольного выпуклого многогранника[1]?

М$9\frac{2}{3}$◇2. Можно ли нарисовать на сфере полный граф с пятью вершинами, чтобы его рёбра не пересекались?

М$9\frac{2}{3}$◇3*. Как изменится формула Эйлера, если граф с непересекающимися рёбрами нарисован не на сфере, а на

а) крендeле (т. е. «сфере с 2 ручками», см. рис. $9\frac{2}{3}$ - 1)

б) торе («сфере с ручкой») **в*)** сфере с g ручками?

М$9\frac{2}{3}$◇4. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и проложить попарно непересекающиеся тропинки от каждого дома к каждому колодцу?

М$9\frac{2}{3}$◇5. На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Двое по очереди соединяют отрезками любые две из ещё не соединённых точек так, чтобы эти отрезки не пересекались нигде кроме отмеченных точек. Тот, кто не может сделать ход, — проиграл. Зависит ли исход этой игры от того, как ходят соперники?

М$9\frac{2}{3}$◇6*. Трёхзначный кодовый замок откроется как только будут последовательно набраны три правильные цифры подряд (вне зависимости от того, какие цифры набирались до этого). Можно ли, набирая по одной цифре в секунду, открыть такой замок за 17 минут?

М$9\frac{2}{3}$◇7. В некой компании поровну юношей и девушек и каждый юноша знаком с двумя девушками, а каждая девушка — с двумя юношами. Докажите, что всех их можно переженить друг на друге в рамках этих знакомств.

k-дольные графы. Раскраска вершин графа называется *правильной*, если никакие две вершины одинакового цвета не соединены ребром. Граф называется *k-дольным*, если правильная раскраска его вершин возможна k цветами и не меньше.

М$9\frac{2}{3}$◇8. Равносильна ли двудольность отсутствию циклов нечётной длины?

М$9\frac{2}{3}$◇9. В любом ли k-дольном графе есть путь из ровно k разноцветных вершин?

М$9\frac{2}{3}$◇10. Существует ли граф с n вершинами $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ и n рёбрами $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, такими что A_i соединяется ребром с A_j тогда и только тогда, когда b_i и b_j выходят из одной вершины? Если да, то какова степень каждой вершины?

М$9\frac{2}{3}$◇11. Города страны соединены $k \cdot m$ прямыми авиалиниями, и некие m юридических лиц вознамерились прихватизировать ровно по k линий, однако антимонопольная служба зорко следит за тем, чтобы ни в одном из городов ни одному лицу не досталось бы сразу две линии, выходящие из этого города. Возможно ли осуществить такую прихватизацию?

М$9\frac{2}{3}$◇12. В кубической коробке $n \times n \times n$ лежали n^3 единичных кубиков. Кубики высыпали, каждый просверлили по диагонали, затем все плотно нанизали на нить и связали в кольцо (соединили вершину первого кубика с вершиной последнего). При каких n получившееся «ожерелье» можно обратно убрать в коробку?

М$9\frac{2}{3}$◇13*. В гости ожидается либо n, либо m человек, причём $\text{НОД}(n, m) = 1$. На какое минимальное число секторов нужно разрезать круглый торт, чтобы из них можно было сложить как n, так и m одинаковых кусков?

М$9\frac{2}{3}$◇14*. Всегда ли среди 50 человек найдутся двое с чётным (возможно, нулевым) числом общих знакомых среди 48 остальных?

[1]который есть не что иное, как связный граф с непересекающимися рёбрами, нарисованный на сфере

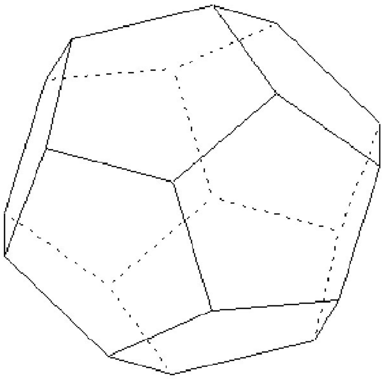
Симметрии и перестановки.

М$9\frac{3}{4}\diamond$1. На плоскости заданы прямые $\ell_1 \neq \ell_2$. Сделаем симметрию относительно ℓ_1, потом — относительно ℓ_2. Что за движение в результате получится, если **а)** $\ell_1 || \ell_2$? **б)** $\ell_1 \nparallel \ell_2$?

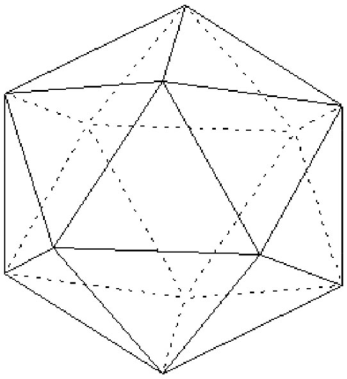
М$9\frac{3}{4}\diamond$2. Сколько разных бус можно сделать из 5 красных, 7 синих и 11 белых одинаковых бусинок?

М$9\frac{3}{4}\diamond$3. Правильный плоский проволочный n-угольник раскрашивают n цветами (каждую сторону в свой цвет). Сколько различных игрушек получится?

М$9\frac{3}{4}\diamond$4. Сколько существует разных вращений, совмещающих с собою заданный правильный



додекаэдр



икосаэдр

а) куб? **б)** тетраэдр? **в)** октаэдр? **г*)** додекаэдр? **д*)** икосаэдр?

Перестановка — это биективное отображение $N \xrightarrow{\sigma} N$ из конечного множества N в себя. Если обозначить элементы конечного множества числами $\{1, 2, \ldots, n\}$, то их перестановку можно записывать строчкой $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ в которой $\sigma_i = \sigma(i)$. Тождественная перестановка $(1, 2, \ldots, n)$ (оставляющая все элементы на месте) обозначается Id. Все перестановки n-элементного множества образуют группу, которая называется *группой перестановок* (или *симметрической группой*) и обозначается $\mathfrak{S}_n$. Перестановка, при которой какие-то m элементов $i_1, i_2, \ldots, i_m \in N$ (с произвольными номерами) переставляются по кругу: $i_1 \longmapsto i_2 \longmapsto i_3 \longmapsto \cdots \longmapsto i_{m-1} \longmapsto i_m \longmapsto i_1$, а все остальные элементы остаются на месте, называется *циклом* длины m. Цикл длины 2 называется *транспозицией*. Перестановка σ, такая что $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}$, называется *отражением* (например, любая транспозиция является отражением).

М$9\frac{3}{4}\diamond$5°. Всякая ли перестановка является композицией **а)** непересекающихся циклов? **б)** (возможно пересекающихся) транспозиций?

М$9\frac{3}{4}\diamond$6°. Для любой ли перестановки σ существует k, такое что $\sigma^k \stackrel{\text{def}}{=} \overbrace{\sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma}^{k} = \mathrm{Id}$?

М$9\frac{3}{4}\diamond$7. Всякое ли отражение является композицией непересекающихся транспозиций?

М$9\frac{3}{4}\diamond$8. Разложите произвольный цикл в композицию двух отражений.

М$9\frac{3}{4}\diamond$9. Пусть перестановка σ получается композицией m_1 циклов длины 1, m_2 циклов длины 2, m_3 циклов длины 3, $\ldots$, m_k циклов длины k, причём все циклы не пересекаются. Сколько всего имеется таких перестановок?

М$9\frac{3}{4}\diamond$10 (чётность перестановки). Скажем, что в перестановке $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ элементы σ_k и σ_m образуют *инверсную пару*, если $k < m$, но $\sigma_k > \sigma_m$. Пусть перестановка σ является композицией t транспозиций. Докажите, что чётность t совпадает с чётностью числа инверсных пар[1]. Что происходит с чётностями при взятии композиций?

М$9\frac{3}{4}\diamond$11. Найдите чётность перестановки $(n, (n-1), \ldots, 1)$.

М$9\frac{3}{4}\diamond$12. Найдите чётность «тасующей перестановки» $(i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_m)$, в которой каждый из двух наборов номеров $\{i_\nu\}, \{j_\mu\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ возрастает слева направо.

М$9\frac{3}{4}\diamond$13. Какие перестановки четырёх **а)** вершин тетраэдра **б)** диагоналей куба можно получить вращениями этих фигур?

М$9\frac{3}{4}\diamond$14*. Какой-то шалун выковырял из игры «пятнадцать» фишки «1» и «2» и засунул их обратно, поменяв местами. Удастся ли вернуть такую позицию в исходное положение, следуя правилам игры?

[1] в частности, зависит только от самой перестановки, а не от выбора разложения в композицию транспозиций

Мультиномиальные коэффициенты

М10◇1. Сколько слагаемых получится, если раскрыть скобки и привести подобные у $(a+b+c)^5$? Будут ли среди них a^2bc^2 и ab^2c^3, и если да, то с каким коэффициентом?

М10◇2. Какие одночлены и с какими коэффициентами получатся после раскрытия скобок и приведения подобных у **а)** $(1+x)^n$; **б)** $(a+b)^n$; **в)** $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^2$; **г)** $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$; **д)** $(1+x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$.

Биномиальные коэффициенты и числа сочетаний. Коэффициент при x^k, получающийся после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых у $(1+x)^n$, называется *биномиальным коэффициентом* и обозначается $\binom{n}{k}$ (обратите внимание, что $\binom{n}{k}=0$ при $k<0$ и $k>n$ и $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=\binom{0}{0}=1$). Количество слов, которые можно получить, переставляя буквы в n-буквенном слове `аа...абб...б`, содержащем k букв `а` и $(n-k)$ букв `б`, называется *числом сочетаний* из n по k и обозначается C_n^k.

М10◇3°. Докажите, что $\binom{n}{k}=C_n^k$ и совпадает с числом путей из зад. М7◇12, ведущих в k-тую комнату на n-том этаже. Верно ли, что $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$?

М10◇4°. Выразите $\binom{n}{k}$ явно через n и k и вычислите для $0\leqslant n\leqslant 15$ и всех $0\leqslant k\leqslant n$.

М10◇5. Из произвольной последовательности чисел $A_0, A_1, \ldots, A_n$ строят новую последовательность $A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, \ldots, A_{n-1}^{(1)}$, состоящую из сумм соседних элементов: $A_i^{(1)}=A_i+A_{i+1}$. Затем строят следующую последовательность $A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, \ldots, A_{n-2}^{(2)}$ с $A_i^{(2)}=A_i^{(1)}+A_{i+1}^{(1)}$ и т. д. пока не получится последовательность $A_0^{(n)}$, состоящая из одного числа. Выразите его через исходные числа $A_0, A_1, \ldots, A_n$ явной формулой.

Треугольник Паскаля — это бесконечный вниз числовой треугольник на рисунке справа. Его строки нумеруются сверху вниз, начиная с нуля, а числа в каждой строке — слева направо, также начиная с нуля; k-е число n-того этажа — это $C_n^k=\binom{n}{k}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \ddots & & \ddots & & \ddots
\end{array}$$

М10◇6. Найдите в треугольнике Паскаля последовательности: **а)** натуральных чисел 1, 2, 3, …,

б) треугольных чисел: T_1, T_2, T_3, …,

в) «пирамидальных» чисел: Π_1, Π_2, Π_3, …, которые составляются из треугольных по правилу: $\Pi_k \overset{\text{def}}{=} T_1+T_2+\cdots+T_k$.

г) Вычислите сумму[1]: $C_k^0+C_{k+1}^1+\cdots+C_{k+n}^n$.

М10◇8. Вычислите суммы: **а)** $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$; **б)** $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n$.

М10◇9. Вычислите суммы: **а)** $C_n^0+C_{n-1}^1+C_{n-2}^2+\cdots$ **б)** $C_n^0+C_{n+1}^2+C_{n+2}^4+\cdots$ **в)** $C_n^1+2\,C_n^2+\cdots+n\,C_n^n$ **г)** $C_n^0+2\,C_n^1+\cdots+(n+1)\,C_n^n$ **д*)** $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$

М10◇10. Выразите $(n+1)^{k+1}-n^{k+1}$ в виде многочлена от n.

М10◇11. Покажите, что сумма k-тых степеней первых n натуральных чисел

а) является многочленом $(k+1)$-ой степени от n;

б*) найдите старший коэффициент и свободный член этого многочлена;

в*) явно выпишите эти многочлены для всех $k\leqslant 5$.

---

[1] С этой задачей связана такая многомерная геометрия:

М10◇7*. Двумерная пирамида высоты k — это треугольник: $\Pi_k^{(2)} \overset{\text{def}}{=} T_k$. Трёхмерная пирамида высоты k состоит из сложенных в стопку треугольников $\Pi_k^{(3)} \overset{\text{def}}{=} T_1+T_2+\cdots+T_k$. Четырёхмерная пирамида высоты k состоит из сложенных в стопку вдоль «четвёртой координатной оси» трёхмерных пирамид: $\Pi_k^{(4)} \overset{\text{def}}{=} \Pi_1^{(3)}+\Pi_2^{(3)}+\cdots+\Pi_k^{(3)}$. Что такое m-мерная пирамида высоты k и сколько m-мерных кубиков уйдёт на её постройку? Из двух двумерных пирамид складывается прямоугольник: $T_k+T_k=k\times(k+1)$. Можно ли из шести трёхмерных пирамид $\Pi_k^{(3)}$ сложить параллелепипед $k\times(k+1)\times(k+2)$? Из скольких m-мерных пирамид высоты k следует пытаться собирать m-мерный параллелепипед и каковы будут его размеры?

Две вариации на тему биномиальных коэффициентов

«... при помощи этой формулы я смог сложить десятые степени первой тысячи натуральных чисел менее, чем за половину четверти часа...»
(Якоб Бернулли (1654–1705), «Ars Conjectandi», издано в 1713 г., посмертно)

М$10\frac{1}{2}$◇1. Любое ли целое число граммов можно отвесить на чашечных весах, пользуясь набором гирь в 1 *г*, 3 *г*, 9 *г*, 27 *г*, ... (по одной гире каждого веса)?

***m*-ичная позиционная система счисления** использует m цифр, коими служат символы: $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}$. Под n-разрядным числом m-ичной системы мы понимаем любую последовательность из n m-ичных цифр (возможно, начинающуюся с нулей). Для $\ell \in \mathbb{N}$ запись $\ell = \overline{\mu_0\mu_1 \ldots \mu_{n-1}}$ означает, по определению, что $\ell = \mu_0 + \mu_1\, m + \mu_2\, m^2 + \cdots + \mu_{n-1}\, m^{n-1}$. Количество всех n-разрядных чисел m-ичной системы с суммой цифр k мы будем обозначать через $\beta_m(n,k)$.

М$10\frac{1}{2}$◇2. Запишите десятичные числа 57, 179 и 2006 в 2-ичной, 3-ичной и 16-ричной системах.

М$10\frac{1}{2}$◇3. Покажите, что при заданном натуральном $m \geqslant 2$, каждое натуральное число ℓ может быть единственным образом записано в m-ичной позиционной системе счисления, т. е. что существует единственный набор целых чисел $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, лежащих в пределах от 0 до $m-1$ включительно и с $\mu_{n-1} \neq 0$, такой что $\ell = \mu_0 + \mu_1\, m + \mu_2\, m^2 + \cdots + \mu_{n-1}\, m^{n-1}$.

М$10\frac{1}{2}$◇4. Сколько всего n-разрядных чисел в m-ичной системе и чему равно $\beta_2(n,k)$?

М$10\frac{1}{2}$◇5. Как связаны $\beta_m(n,k)$ и коэффициент при x^k в разложении

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1}\right)^n$$

М$10\frac{1}{2}$◇6. Справедливы ли соотношения:

а) $\beta_m(n,k) = \beta_m(n,\, n\,(m-1) - k)$

б) $\beta_m(n,k) = \beta_m(n-1,k) + \beta_m(n-1,k-1) + \cdots + \beta_m(n-1,k-m+1)$

М$10\frac{1}{2}$◇7. Суеверные люди считают счастливым каждое шестиразрядное десятичное число, у которого сумма трёх первых цифр равна сумме трёх последних. Сколько таких «счастливых» чисел[1]?

Числа Бернулли B_k начинаются с $B_0 \overset{\text{def}}{=} 1$ и определяются реккурентно[2] формулой

$$B_k = -\frac{1}{k+1}\left(C^0_{k+1}B_0 + C^1_{k+1}B_1 + \cdots + C^{k-1}_{k+1}B_{k-1}\right).$$

М$10\frac{1}{2}$◇8*. Покажите, что сумма k-тых степеней первых $(n-1)$ натуральных чисел равна

$$\frac{1}{k+1}\left(C^0_{k+1}B_0\, n^{k+1} + C^1_{k+1}B_1\, n^k + \cdots + C^{k-1}_{k+1}B_{k-1}\, n\right).$$

М$10\frac{1}{2}$◇9*. Вычислите первые 14 чисел Бернулли и сумму $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + (n-1)^{10}$.

М$10\frac{1}{2}$◇10*. Что Вы можете сказать про числа Бернулли с нечётными номерами?

М$10\frac{1}{2}$◇11*. Как ведут себя знаки чисел Бернулли?

[1] подсказка: их $\beta_{10}(6,27)$

[2] предупреждение: «явного» выражения B_n через n не существует...

Арифметика вычетов

M11◇1 (остаток суммы и произведения). Пусть целые числа a и b имеют остатки α и β от деления на n. Какие статки от деления на n имеют числа: **а)** $a+b$ **б)** ab .

M11◇2. Найдите последнюю цифру и остаток от деления на 7 у **а)** 1998^{1999} **б)** $1998^{1999^{2000}}$.

M11◇3. Верно ли, что **а)** $2222^{5555}+5555^{2222}$ делится на 7? **б)** $2^{70}+3^{70}$ делится на 13?

M11◇4. Может ли квадрат натурального числа давать остаток 2 от деления на 6? Какие остатки могут давать квадраты натуральных чисел от деления на 8?

M11◇5. Имеет ли уравнение $x^2+y^2+z^2=2\,xyz$ ненулевые решения в целых числах?

M11◇6. Верно ли, что: **а)** $a^2+b^2 \,\vdots\, 7 \Rightarrow a \,\vdots\, 7$ и $b \,\vdots\, 7$? **б*)** $a^3+b^3+c^3 \,\vdots\, 7 \Rightarrow abc \,\vdots\, 7$? **в*)** $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \,\vdots\, 9 \Rightarrow abcde \,\vdots\, 9$?

Арифметика вычетов по модулю 7 (или 7-*арифметика*) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ состоит из семи «чисел» — остатков от деления на 7 (мы будем обозначать их $[0]_7$, $[1]_7$, … , $[6]_7$). По определению, $[x]_7+[y]_7$ есть остаток от деления на 7 суммы $x+y$, а $[x]_7\cdot[y]_7$ — остаток произведения xy.

M11◇7. Составьте для 7-арифметики таблицы сложения и умножения и проверьте, что эти операции подчиняются обычным переместительному, сочетательному и распределительному законам. Дайте определение противоположного числа $-a$ и обратного числа a^{-1} к данному числу $a\in\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Составьте таблицы противоположных и обратных чисел. Справедливы ли в 7-арифметике тождества $(-1)\cdot a=-a$ и $(-a)\cdot(-b)=ab$?

M11◇8. Дайте определение n-арифметики $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и составьте таблицы сложения и умножения для 4-, 5-, 6- и 8-арифметик. Верно ли, что при умножении в n-арифметике
- **а)** у всех ненулевых чисел есть обратные **б)** «минус» на «минус» даёт «плюс»
- **в)** $a\neq 0$ и $b\neq 0 \Rightarrow ab\neq 0$ **г)** $ab=ac$ и $a\neq 0 \Rightarrow b=c$ **д)** $a\neq 0\Rightarrow a^n\neq 0\ \forall\, n\geqslant 1$
- **е)** степени a^0, a^1, a^2, a^3, … любого $a\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ всегда «зацикливаются»?

M11◇9. Вычислите сумму всех чисел n-арифметики. Делится ли $1^3+2^3+\dots+28^3$ на 29?

M11◇10 (позиционные признаки делимости). Вычислите остатки всех степеней десятки от деления на 2, 5, 4, 3, 9, 11, 7 и скажите, как, глядя на цифры десятичной записи данного числа (скажем, $\overline{abcdefghi}$) узнать, делится ли оно на 2, 5, 4, 3, 9, 11, 7?

M11◇11. У каких чисел 4-, 5-, 6- и 8-арифметик есть обратные (такие числа называются *обратимыми*)? Укажите эти обратные явно.

M11◇12. Докажите, что следующие свойства $a\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ попарно эквивалентны:
- **а)** a обратим; **б)** отображение умножения на a: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\xrightarrow{x\mapsto ax}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ взаимно однозначно;
- **в)** $ax=0\Rightarrow x=0$; **г)** $ax=ay\Rightarrow x=y$; **д)** $\forall y\ \exists x\ :\ ax=y$; **е)** $\text{НОД}(a,n)=1$.

M11◇13*. Зафиксируем обратимое $a\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, изобразим все числа n-арифметики точками, и из каждой точки $x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ проведём стрелку в точку ax. Верно ли, что на этой картинке:
- **а)** движение по стрелкам распадается на непересекающиеся циклы?
- **б)** все циклические траектории имеют одинаковую длину?
- **в)** если цикл содержит обратимое число, то он весь состоит из обратимых чисел?
- **г)** все циклы, состоящие из обратимых чисел, имеют одинаковую длину?

M11◇14* (теорема Эйлера). *Функция Эйлера* φ сопоставляет каждому натуральному $n\geqslant 2$ количество $\varphi(n)$ обратимых чисел в n-арифметике. Используя предыдущую задачу, докажите, что для любых взаимно простых $a,b\in\mathbb{N}$ число $a^{\varphi(b)}$ имеет остаток 1 от деления на b.

Простые числа и разложение на множители

Определение. Число $p \in \mathbb{Z}$ называется *простым*, если оно делится только на ± 1 и $\pm p$.

М12◇1. Найдите все натуральные простые числа, которые одновременно представляются в виде суммы и в виде разности двух натуральных простых чисел.

М12◇2. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

М12◇3. Существуют ли на числовой прямой сколь угодно длинные отрезки, не содержащие ни одного простого числа?

М12◇4*. Верно ли, что среди чисел вида **а)** $2^{2^k}-1$ **б)** $1\overbrace{00\ldots00}^{k}3$ **в)** $\overbrace{33\ldots33}^{k}1$ имеется бесконечно много составных?

М12◇5 (основное свойство простых чисел). Пусть $p \in \mathbb{Z}$ простое. Докажите, что $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$ произведение ab делится на p только если a или b делится на p. Бывают ли непростые числа p с таким свойством?

М12◇6. Пусть $p > 0$ простое. Существуют ли $x, y \in \mathbb{N} : x^2 = p\, y^2$?

М12◇7*. Существуют ли $n \geqslant 1$ различных простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и рациональные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не все равные нулю, для которых $\lambda_1\sqrt{p_1} + \lambda_2\sqrt{p_2} + \cdots + \lambda_n\sqrt{p_n}$ рационально[1]?

М12◇8 (факториальность $\mathbb{Z}$). Докажите, что любое целое число z можно представить в виде произведения $z = \pm p_1 p_2 p_3 \cdots p_s$, в котором все сомножители суть натуральные простые числа (не обязательно разные), и любые два таких разложения (например, полученные разными способами) могут различаться *только порядком следования множителей*.

М12◇9. Разложите на простые множители все числа A, B из зад. М6◇7.

М12◇10. Сколько различных натуральных делителей у числа: **а)** 27; **б)** 35; **в)** 67500; **г)** $p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \cdots p_s^{m_s}$ (p_ν — попарно разные простые).

М12◇11. Найдите все кратные 30 числа с ровно тридцатью натуральными делителями.

М12◇12*. Перечислите все $n \in \mathbb{N}$, имеющие не менее $\sqrt{n}$ натуральных делителей.

М12◇13. Вычислите $\varphi(n)$ для **а)** $n = 36$ **б)** $n = p^k$ (p – простое) **в)** $n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_s$ **г*)** $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \cdots p_s^{m_s}$ (p_ν попарно разные простые).

М12◇14* (теорема Вильсона). Чему равно произведение всех ненулевых чисел n-арифметики при простом и составном n? Верно ли, что натуральное число $p \geqslant 2$ просто, если и только если оно делит $(p-1)! + 1$?

М12◇15* (гомоморфизм Фробениуса). Пусть $p > 0$ — простое. Верно ли, что в p-арифметике выполняется тождество $(a+b)^p = a^p + b^p$?

М12◇16* (малая теорема Ферма). Докажите, что для любого $a \in \mathbb{N}$ и простого p степень a^p имеет тот же остаток от деления на p, что и a.

М12◇17* (конечная геометрия). Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ — арифметика вычетов по модулю 5. Координатная плоскость $\mathbb{F}^2$ — это множество всех упорядоченных пар (x_1, x_2) с x_1, $x_2 \in \mathbb{F}$. Прямая, проходящая через точку $q = (q_1, q_2)$ в направлении вектора $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$, — это множество всех точек вида $q + t \cdot \overrightarrow{v} = (\, q_1 + tv_1\,,\, q_2 + tv_2\,)$ со всевозможными $t \in \mathbb{F}$. Непересекающиеся прямые называются *параллельными*.

а) Нарисуйте все прямые, проходящие через начало координат. Сколько их?

б) Зависит ли число прямых, проходящих через заданную точку q, от выбора q?

в) Верно ли, что через любую пару различных точек проходит ровно одна прямая?

г) Справедлив ли в такой геометрии пятый постулат Евклида?

д) Верно ли, что множество точек $\{(x_1, x_2)\}$ составляет прямую, если и только если оно является множеством всех решений некоторого линейного уравнения $ax_1 + bx_2 = c$?

[1] в общем случае это *очень* трудная задача; обязательно попытайтесь, однако, решить её хотя бы для $n = 1, 2, 3$

Радикальные преобразования

(напоминания из алгебры перед грядущими экзаменами)

... здесь вам не университет: тут головой думать надо!
(из армейского юмора)

Абсолютная величина. Напомним, что через $|a-b|$ (читается «модуль a минус b») обозначается расстояние между точками a и b на числовой прямой $\mathbb{R}^1$. Таким образом, $|a-b|=|b-a|$ равно той из двух разностей $(a-b)$, $(b-a)$, которая неотрицательна. Вместо $|a-0|=|0-a|$ пишут просто $|a|$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 1^\circ$. Из перечисленных ниже утверждений верные докажите, а неверные опровергните и, по возможности, исправьте: **а)** $\dfrac{\alpha}{\beta}<\dfrac{a}{b}\Rightarrow\dfrac{\alpha}{\beta}<\dfrac{\alpha+a}{\beta+b}<\dfrac{a}{b}\ \forall\,\alpha,a,\beta,b\in\mathbb{R}$ с $\beta,b>0$;

б) $a\leqslant b$ и $\alpha\leqslant\beta\Rightarrow\dfrac{a}{\beta}\leqslant\dfrac{b}{\alpha}\ \forall\,a,b,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; **в)** $|a-b|+|b-c|=|a-c|\ \forall\,a,b,c\in\mathbb{R}$;

г) $|a|-|b|\leqslant|a-b|\ \forall\,a,b\in\mathbb{R}$; **д)** $|a|+|b|\geqslant|a+b|\ \forall\,a,b\in\mathbb{R}$; **е)** $\sqrt{x^2}=x\ \forall\,x\in\mathbb{R}$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 2$. Без помощи калькулятора выясните, что больше:

а) $\sqrt{37}-6$ или ${}^1\!/_{10}$; **б)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ или $\sqrt{5}-2$ **в)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ или 5; **г)** $\sqrt[3]{60}$ или $2+\sqrt[3]{7}$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 3$. Какие из перечисленных ниже пар чисел обратны друг другу:

а) $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$; **б)** $\left(2\sqrt{20}+9\right)^{100}$ и $\left(2\sqrt{20}-9\right)^{100}$; **в)** $\left(7+5\sqrt{2}\right)^3$ и $\left(7-5\sqrt{2}\right)^3$,;

г) $\left(7+5\sqrt{2}\right)^4$ и $\left(7-5\sqrt{2}\right)^4$; **д)** $3+\sqrt{2}$ и $3-\sqrt{2}$; **е)** $\sqrt[3]{9}-3$ и $3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 4$. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: **а)** $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$; **б)** $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$;

в) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}+1}$; **г)** $\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$; **д)** $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; **е*)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}$; **ж*)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}}$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 5$ (формулы Виета). В произведении $(x-\vartheta_1)(x-\vartheta_2)\cdots(x-\vartheta_m)$ раскрыли скобки и сгруппировали слагаемые по степеням x. Чему будет равен коэффициент при x^k? Из скольких слагаемых он состоит?

M$12\frac{1}{2}\diamond 6$. Придумайте многочлен с целыми коэффициентами, среди корней которого есть:
а) $1+\sqrt{7}$; **б)** $5-2\sqrt{3}$; **в)** $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$; **г)** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 7$. Какими должны быть α, β, чтобы $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2=a+\sqrt{b}$ для данных a, b? Выделяя полный квадрат или куб, избавьтесь от наружнего радикала в выражениях:

а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; **б)** $\sqrt{28+10\sqrt{3}}$; **в)** $\sqrt{67+12\sqrt{7}}$; **г)** $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$; **д)** $\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$;

е) $\sqrt[3]{37+30\sqrt{3}}$; **ж)** $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$; **з)** $\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$; **и)** $\sqrt[3]{21\sqrt{6}-23\sqrt{5}}$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 8$. Пусть $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$. Верно ли, что при $\alpha\neq\beta$ числа $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ и $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ либо оба рациональны, либо оба иррациональны?

M$12\frac{1}{2}\diamond 9$. Рациональны ли числа: **а)** $\sqrt{5}+\sqrt{3}$; **б)** $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}$; **в)** $\left(\sqrt{5}+1\right)^3-\left(\sqrt{5}-1\right)^3$;

г) $\left(1+\sqrt{2}\right)^5+\left(1-\sqrt{2}\right)^5$; **д)** $\left(1+\sqrt{3}\right)^{11}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{11}$; **е)** $\left(\sqrt{3}+1\right)^{10}-\left(\sqrt{3}-1\right)^{10}$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 10$. Вычислите первую тысячу знаков после запятой у
а) $\left(12-\sqrt{143}\right)^{2000}$; **б*)** $\left(7+\sqrt{48}\right)^{1999}$; **в*)** $\left(7+\sqrt{50}\right)^{2000}$; **г*)** $\left(7+\sqrt{50}\right)^{2001}$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 11^*$. Чётна или нечётна целая часть числа $\left(45+\sqrt{1975}\right)^{30}$?

Бесконечные множества

М13◇1°. Придумайте множество A, вложение $A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} A$ и наложение $A \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} A$, которые, однако, не являются *биекциями*. Возможно ли такое для конечного множества A?

М13◇2. Толя рисует на доске 10 крестиков, после чего Коля стирает один из них, затем Толя рисует ещё 10 крестиков, а Коля стирает ещё один крестик и т. д. На первую пару ходов уходит 1 сек., на вторую — пол секунды, на третью — четверть и т. д. Толя выигрывает, если через 2 сек. на доске будет хоть один крестик; в противном случае выигрывает Коля. Кто победит при правильной игре?

М13◇3. Бесконечный направо и вниз лист клетчатой бумаги сплошь заполнен крестиками и ноликами. Берётесь ли Вы, глядя на этот лист, в любом случае построить последовательность крестиков-ноликов, не совпадающую ни с одной из строк?

Счётные множества. Множество M называется *счётным*, если оно изоморфно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. Иначе говоря, множество M счётно, если все его элементы можно занумеровать разными натуральными числами, так что все натуральные числа будут при этом израсходованы.

М13◇4. Счётно ли множество **а)** конечных **б)** бесконечных слов из букв а и б ?

М13◇5. Счётно ли множество: **а)** простых **б)** целых **в)** рациональных чисел?

М13◇6. Счётно ли множество точек координатной плоскости, обе координаты которых **а)** целые **б)** рациональные?

М13◇7. Всегда ли бесконечное подмножество счётного множества счётно?

М13◇8. Является ли счётным объединение **а)** счётного множества с конечным множеством; **б)** конечного числа (например, двух или трёх) счётных множеств; **в)** счётного множества счётных множеств?

М13◇9. Пусть при отображении множеств $A \xrightarrow{f} B$ у каждого $b \in B$ имеется непустое **а)** конечное **б)** конечное или счётное множество прообразов.
Верно ли, что A счётно тогда и только тогда, когда B счётно?

М13◇10. Счётно ли множество всех: **а)** конечных **б)** счётных подмножеств счётного множества?

Мощность. Про изоморфные множества говорят, что они *равномощны*. Если множество A изоморфно некоторому подмножеству множества B, но не изоморфно самому B, то говорят, что B *мощнее* A.

М13◇11*. Докажите, что множество отображений из произвольного множества A в любое множество, содержащее не менее двух элементов, мощнее, чем A.

М13◇12*. Докажите, что множество всех подмножеств непустого множества A мощнее, чем A.

М13◇13. Постройте биекцию между отрезком $[0,1]$ и полуинтервалом $[0,1)$.

М13◇14* (теорема Кантора - Бернштейна). Докажите, что если множество B равномощно подмножеству множества A, а множество A равномощно подмножеству множества B, то A и B равномощны.

О противоречиях. Высказывание «A и не A» называется *противоречием*. Утверждение *противоречиво*, если из него следует противоречие[1].

М13◇15* (уроки демократии - 2). Был при Ельцине в Думе такой меж депутатами разговор:
ж: «*На следующей неделе думу точно распустят!*» з: «*В какой же день?*»
ж: «*Об этом не будет известно даже накануне!*».
Докажите, что совокупность высказываний депутата ж противоречива.

М13◇16*. Не противоречивы ли понятия: **а)** «множество всех множеств»; **б)** «множество всех множеств, задающихся фразой из $\leqslant 2000$ типографских знаков».

[1] а стало быть и всё, что угодно

Об упорядочении

Три уровня порядка. Множество называется *частично упорядоченным* (ЧУМом), если про некоторые пары его элементов a, b можно сказать $a \leqslant b$, так чтобы при этом были выполнены три свойства[1]:

(1) $a \leqslant a\ \forall a$, **(2)** $a \leqslant b$ и $b \leqslant a \Rightarrow a = b$, **(3)** $a \leqslant b$ и $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$.

ЧУМ называется *линейно упорядоченным*, если отношение порядка охватывает *все* пары элементов, т. е. $\forall\, a,\, b \in M$ выполнено $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$. Элемент $\mu \in M$ ЧУМа M называется *минимальным*, если $\forall\, x \in M$ из неравенства $x \leqslant \mu$ вытекает равенство $x = \mu$. Линейно упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если в любом его подмножестве имеется *минимальный* элемент. Два вполне упорядоченных множества называются *подобными*, если между ними имеется взаимно однозначное соответствие, *сохраняющее порядок*. Классы подобных вполне упорядоченных множеств называются *трансфинитными числами*[2]. В любом линейно упорядоченном множестве можно ввести отношение $a < b$ означающее, что $a \neq b$ и $a \leqslant b$; тогда $\forall a, b$ будет выполнена альтернатива: либо $a < b$, либо $a = b$, либо $a > b$.

M$13\frac{1}{2}\diamond 1^\circ$. Выясните, какие из указанных ниже отношений «$\preccurlyeq$» на множествах M являются упорядочениями и какого типа: **а)** $M = \mathbb{N}$ и $a \preccurlyeq b \iff b$ делится на a; **б)** то же для $M = \mathbb{Z}$;
в) $M = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ с обычным $\leqslant$ для чисел; **г)** то же для $M = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где $\infty \geqslant n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$;
д) M есть множество всех подмножеств некоторого множества A и $a \preccurlyeq b \iff a \subseteq b$;
е) M есть множество вершин ориентированного графа Γ и $a \preccurlyeq b \iff$ в Γ есть ребро $\overrightarrow{ab}$.

M$13\frac{1}{2}\diamond 2^\circ$. Дайте определение максимального элемента ЧУМа и приведите пример ЧУМа с несколькими максимальными элементами.

M$13\frac{1}{2}\diamond 3$ (принцип трансфинитной индукции). Пусть множество M вполне упорядочено, и про его элементы высказано некое утверждение $\mathfrak{U}$, которое истинно для минимального элемента множества M, и при всех $m \in M$ из того, что $\mathfrak{U}$ истинно $\forall\, x < m$, следует, что $\mathfrak{U}$ истинно для m. Докажите, что $\mathfrak{U}$ истинно $\forall\, m \in M$.

M$13\frac{1}{2}\diamond 4$ (начальные отрезки). Подмножество $(-\infty\,,\, x\,] \stackrel{\text{def}}{=} \{\, m \in M \mid m \leqslant x \,\}$ ЧУМа M называется *начальным отрезком M до x*. Верно ли, что
а) любой начальный отрезок произвольного ЧУМа линейно упорядочен?
б) вполне упорядоченное множество иногда бывает подобно своему начальному отрезку, отличному от всего множества?
в) отношение $a \preccurlyeq b \iff$ «a подобно начальному отрезку b» вполне упорядочивает трансфинитные числа?

Полные ЧУМы. ЧУМ M называется *полным*, если для каждого линейно упорядоченного подмножества $U \subset M$ существует $m \in M$, такой что $u \leqslant m\ \forall\, u \in U$ (любой такой m называется *верхней гранью* для U).

M$13\frac{1}{2}\diamond 5^*$ (теорема о неподвижной точке). Какие из ЧУМов, перечисленных в зад. M$13\frac{1}{2}\diamond 1$ являются полными? Всякое ли отображение $M \xrightarrow{f} M$ из полного ЧУМа в себя, обладающее свойством $x \leqslant f(x)\ \forall\, x \in M$, имеет неподвижную точку (т. е. $\exists\, x_0 \in M : f(x_0) = x_0$)?

Аксиома выбора входит в список аксиом «строгой» теории множеств и утверждает, что в любом множестве непустых множеств можно выбрать по одному элементу из каждого множества (иначе говоря, для любого множества $\mathfrak{M}$, элементы которого сами суть непустые множества, существует отображение f из $\mathfrak{M}$ в объединение всех множеств $M \in \mathfrak{M}$, такое что $f(M) \in M\ \ \forall\, M \in \mathfrak{M}$).

M$13\frac{1}{2}\diamond 6^*$. Выведите из аксиомы выбора и зад. M$13\frac{1}{2}\diamond 5$ следующие два утверждения[3]:
а) (лемма Цорна) В любом полном ЧУМе есть максимальный элемент.
б) (теорема Цермело) Любое множество можно вполне упорядочить.

---

[1] «по-научному» свойства $1, 2, 3$ называются *рефлексивностью*, *антисимметричностью* и *транзитивностью*

[2] в частности, *натуральные числа* — это в точности конечные трансфинитные числа

[3] решение этих (весьма трудных) задач не стыдно подглядеть в книгах: *Ван Дер Варден. Алгебра.* М. «Мир» (1976), стр. 246–249 или *П. С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию.* М. «Наука» (1977), стр. 80–83.

Действительные числа и БДД

Бесконечная десятичная дробь (БДД) — это конечная влево и бесконечная вправо последовательность десятичных цифр вида $\pm\overline{b_{-n}\ldots\, b_{-1}b_0, b_1b_2\ldots\, b_m\ldots}$. Куски слева и справа от запятой называются *целой* и *дробной* частями данной БДД. Если БДД имеет лишь конечное множество ненулевых цифр, то она называется *конечной*; у такой БДД все цифры правее некоего разряда — нули, и их обычно не пишут.

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ получается из множества всех БДД путём отождествления друг с другом некоторых пар БДД по следующему правилу: две БДД, по определению, изображают одно и то же действительное число, если и только если они одного знака и существует номер $i \in \mathbb{Z}$, такой что цифры этих дробей во всех разрядах левее i-того совпадают, в i-том разряде различаются ровно на единицу, и дробь с большей i-той цифрой имеет справа от i-того разряда одни нули, а с меньшей — одни девятки. Иными словами, $\overline{b_\beta\,\ldots\, b_{i-1}\, b_i\, 9\,9\,9\,9\,\ldots} = \overline{b_\beta\,\ldots\, b_{i-1}\,(b_i+1)\,0\,0\,0\,0\ldots}$ как действительные числа. Если действительное число имеет два представления в виде БДД, то представление, оканчивающееся нулями, мы будем называть *стандартным* и использовать по умолчанию именно его.

M14◇1. Докажите, что множество $\mathbb{R}$ несчётно.

Неравенства. Положительные БДД *больше* отрицательных. Для сравнения двух положительных БДД их стандартные представления записывают друг под другом, выровнив по запятой; *меньшей* считается БДД с меньшей самой левой из несовпадающих цифр. Для отрицательных БДД наоборот: $-a < -b \Leftrightarrow a > b$.

Ограниченность. Число $b \in \mathbb{R}$ называется *верхней гранью* для данного множества действительных чисел $M \subset \mathbb{R}$, если $b \geqslant x \quad \forall x \in M$. Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если у него есть верхняя грань. Аналогично определяются *нижняя грань* и *ограниченность снизу*. Множества ограниченные одновременно и сверху и снизу называются просто *ограниченными*.

M14◇2°. Не употребляя отрицаний, дайте определения:

а) числа, не являющегося нижней гранью данного множества $M \subset \mathbb{R}$;

б) множества, неограниченного сверху **в)** неограниченного множества.

Максимальные элементы. Число $m \in M$, такое что $m \geqslant x \quad \forall x \in M$, называется *максимальным элементом* множества $M \subset \mathbb{R}$. Максимальный элемент в множестве нижних граней данного множества M называется *точной нижней гранью* (сокращённо: ТНГ) и обозначается $\inf M$ (от латинского «infimum»).

M14◇3°. Дайте определение *минимального* элемента и *точной верхней грани* (сокращённо: ТВГ) данного множества $M \subset \mathbb{R}$ (она обозначается $\sup M$ — от латинского «supremum»).

M14◇4. Каждое ли ограниченное сверху подмножество в $\mathbb{R}$ имеет максимальный элемент?

M14◇5. Вычислите ТВГ множеств: **а)** $\{0,3\,;\ 0,33\,;\ 0,333\,;\ 0,3333\,;\ 0,33333\,;\ \ldots\}$;

б) сумм $1 + q + q^2 + \cdots + q^m$ с фиксированным $0 < q < 1$ (скажем, $q = 1/2$) и любым $m \in \mathbb{N}$.

M14◇6. Верно ли, что любая БДД $b \in \mathbb{R}$ есть ТВГ множества:

а) всех БДД, меньших b; **б)** всех конечных БДД, меньших b;

в) всех конечных БДД, являющихся начальными кусками b.

M14◇7 (теорема о полноте). Докажите, что каждое ограниченное сверху подмножество в $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань, а каждое ограниченное снизу – точную нижнюю.

M14◇8 (сложение и умножение). Суммой БДД $a, b \in \mathbb{R}$ называется ТВГ чисел вида $\alpha + \beta$, где $\alpha < a$ и $\beta < b$ — всевозможные *конечные* БДД. Аналогично, произведение ab двух *положительных* БДД — это ТВГ чисел вида $\alpha\beta$ с *конечными положительными* $\alpha < a$ и $\beta < b$ (на неположительные БДД произведение распространяется по стандартному правилу «$-$» на «$-$» даёт «$+$»). Докажите, что эти определения корректны (т. е. нужные ТВГ существуют), дают для конечных a и b то же, что и раньше, и проверьте, что $a(b + c) = ab + ac \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

M14◇9 (корни). Пусть $b \in \mathbb{R}$ есть ТВГ конечных БДД β с $\beta^2 < 5$. Докажите, что b существует и вычислите b^2.